ESTÁTICA

Sesión 2

2. VECTORES

Los vectores son magnitudes especiales. Basicamente podemos decir que el vector es un segmento de línea recta que tiene en un extremo una punta de flecha. La longitud del segmento de recta llamada módulo, es equivalente de manera proporcional el valor numérico de la magnitud que represente. La posición del vector (horizontal, inclinado o vertical), determinará la dirección y la punta de flecha colocada en uno de sus extremos indicará el sentido hacia donde el vector apunta.

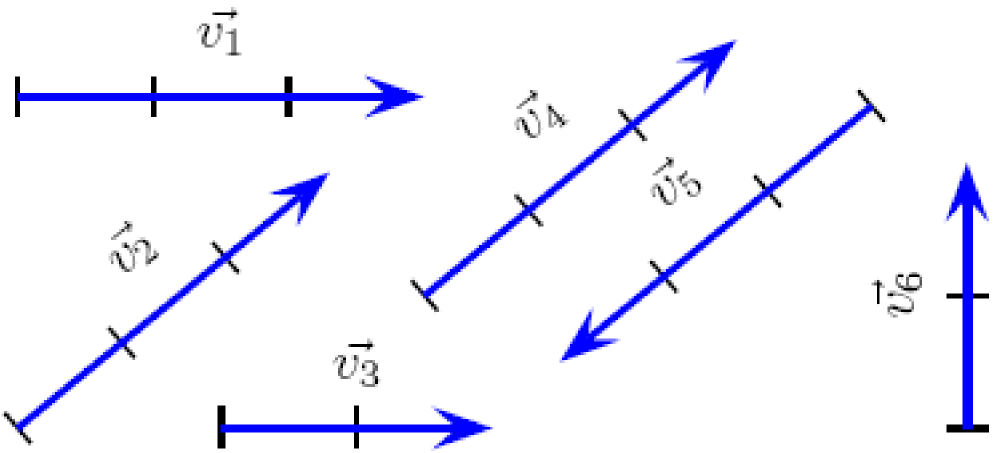


Figura tomada de
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~04001205/fisiqui/imagenes/vectores/473396841_e1de1dd225_o.png

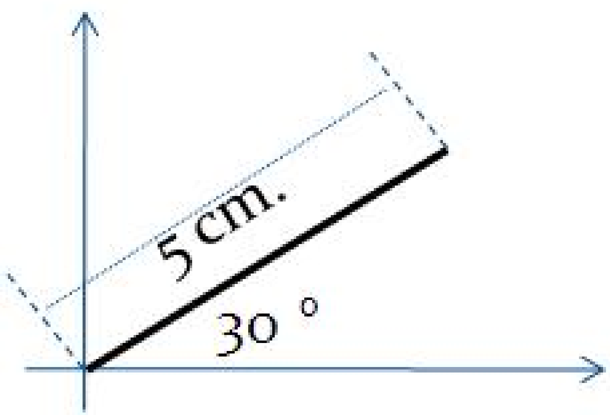
Observa que varios de estos vectores tienen la misma longitud, es decir, su módulo es el mismo, sin embargo están ubicados en distintas direcciones por lo que no son en realidad representantes de la misma situación.
Dado que los vectores son formados por segmentos de línea recta y las líneas rectas pueden ubicarse perfectamente en un plano cartesiano, a traves de sus coordenadas en una (X) o en dos (X,Y) e incluso en tres (X,Y,Z) dimensiones. Los vectores pueden describirse en términos de componentes cartesianas a traves de parejas de puntos que indican el incio del vector o punto de aplicación y el final del vector o extremo donde se ubica la punta de flecha que señala su sentido.

Las partes principales de u vector son:

- **Origen** o punto de aplicación.
- **Dirección**: la recta que lo contiene.
- **Sentido**: el que indica la flecha.
- **Módulo**: longitud del segmento. Indica el valor numérico de la magnitud en la unidad elegida.

Así por ejemplo un vector formado por el par de componentes (2,2) y (3,3) tendrá una longitud o módulo exactamente de una unidad y estará ubicado a en una diagonal a 45 º.

Desde luego que si los vectores pueden ser descritos en términos de coordenadas escalares, también pueden ser descritos en términos de coordendas polares, describiendo unicamente el tamaño de su módulo y el ángulo de inclinaciónque presentan con respecto al eje de las X por convensión.



2.1 Escalares y vectores

Recordemos que la palabra magnitud, significa “medible”, por lo que todo aquello que pude medirse se conoce de manera general como una magnitud.

Existen magnitudes que al momento de expresarse, quedan plenamente entendidas con tan sólo indicar una cantidad y una unidad. Por ejemplo al decir 5kg, queda claro que hablamos de un peso, y al mencionar 6h. Es evidente que hablamos de un tiempo transcurrido o por transcurrir. Al expresar 8 l (litros), hablamos de un volumen y al determinar que las dimensiones de un espacio son 20m por 10m. Estamos en condiciones de determinar su área como A = 20m X 10m = 200m^2. Cantidad que al leerse nos indica de manera inmediata que se trata del cálculo de un área, mientras que si determinamos que una medida es de 50 m^3 sabemos que se está expresando un volumen.

Las magnitudes que sólo requieren para ser correctamente expresadas y entendidas una cantidad y una unidad, son conocidas como magnitudes escalares.

Sería bueno que en este momento pienses en al menos 5 magnitudes diferentes que sean escalares.

Por otro lado, existen magnitudes que además de la cantidad y de la unidad, requieren que se indique un sentido para ser bien comprendidas. Ejemplo clásico de esta situación, es la que se vive al escuchar las noticias relacionadas con la velocidad de los vientos de un huracán. No basta en este caso, decir que los vientos del citado huracán se mueven a 120 km/h. Es necesario, para que esta inofrmación se comprlenda plenamente, determinar el rumbo que estos vientos llevan. Así entonces decir que el huracán avanza con una velocidad de 120 km/h hacia el Noreste (NE) puede ser muy distinto a la situación en que los vientos pudieran tomar una direción Sur Oeste (SO).

Como ya se dijo anteriormente, las magnitudes que requieren además de una cantidad, una dirección y un sentido son conocidas como vectores. La velocidad es un vector y también el desplazamiento. Analiza que no es lo mismo desplazarse 5 m. hacia el Norte (N) que hacerlo en la misma cantidad (módulo) hacia el Sur (S).

2.2 Cómo operar con vectores

Muchas de las leyes de la física implican no sólo relaciones algebraicas entre cantidades sino también relaciones geométricas.

En ocasiones las relaciones geométricas complican las relaciones algebraicas entre las magnitudes físicas.

Sin embargo si usamos vectores para representar a las magnitudes físicas se requiere entonces de un numero menor de ecuaciones matemáticas para expresar las relaciones entre las magnitudes.

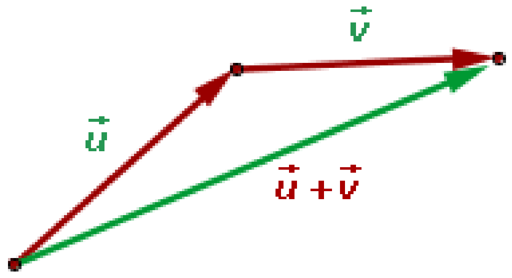
Los vectores permiten esta economía de expresión en numerosas leyes de la Física.

A veces la forma vectorial de una ley física nos permite ver relaciones o simetrías que de otro modo estarían veladas por ecuaciones algebraicas engorrosas.

Dado que los vectores representan información que involucra una medición escalar por tener un valor numérico y una unidad representadas con la longitud del segmento de recta llamada módulo y además, proporcionan una dirección y un sentido, es interesante saber realizar operaciones aritméticas basícas con ellos. ¿Qué sucede si un vector se suma a otro? Podriamos pensar rápidamente que la solución es un vector de mayor tamaño al ser representativo de dos vectores más pequeños tomando en cuenta el axioma que dice: "el todo es mas grande que cualquiera de sus partes" pero en la realidad esto no sucede si al menos unos de los vectores sumados resulta apunta en un sentido contrario al otro considerándose de esta manera como un vector negativo. Para el caso de restar vectores sucederá algo similar.
Multiplicar vectores resulta también útil al representar fenómenos de crecimiento en modelos matemáticos por ejemplo o incluso en reprrsentaciones de fenómenos físicos.
Al multiplica vectores existen basicamente dos tipos de operación. La primera, donde el multiplicando es un escalar y el multiplcador es un vector y la segunda forma, donde ambas partes del producto, multiplicando y multiplicador son vectores.

2.2.1. Suma vectorial

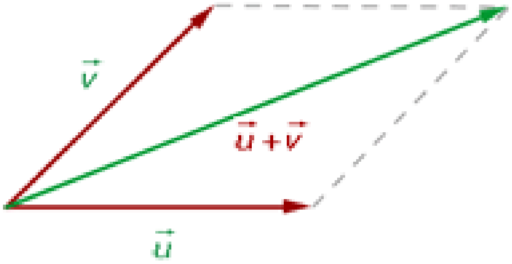
La suma de un par de vectores es simple en realidad, basta con colocar el origen de uno de los vectores sumandos justamente en la punta de la flecha del otro vector. Desde luego la posición (dirección, sentido) de ambos debe respetarse. El vector resultante se encuentra trazano un segmento de recta que partirá del origen del primer vector sumando al extremo final del segundo vector sumando como se indica en la siguiente figura



tomada de http://www.vitutor.com/geo/vec/a_6.html

Método del paralelogramo:

Para sumar dos vectores también puede aplicarse la regla del paralelogramo



Si consideramos dos vectores nuevamente llamado U y V de acuerdo a la figura de arriba, colocaremos ambos vectores respetando sus direcciones y sentidos de tal manera que coincidan en sus orígenes. Posteriormente trazaremos rectas paralelas de igual dimensión a cada uno de los vectores sumandos U y V para formar un paralelogramo. (Por eso esta regla es conocida como regla del paralelogramo). La diagonal que surge a lo largo del paralelogramo es el vector resultante cuyo sentido estará ubicado en el extremo donde se unan las puntas de flecha de las rectas paralelas trazadas.

Para sumar dos vectores se suman sus respectivas componentes.

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \qquad \vec{v} = (v_1, v_2)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, \; u_2 + v_2)$$

Información e imágenes recopiladas de http://www.vitutor.com/geo/vec/a_6.html

Al igual que las sumas aritméticas tienen propiedades las sumas vectoriales también tienen algunas propiedades, estas son:

Asociativa

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

Conmutativa

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

Elemento neutro

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

Elemento opuesto

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

Método del Polígono: Se emplea este método cuando más de dos vectores participan en la suma de fuerzas. Consiste en formar cada vector, uno tras otro, respetando su dirección y de modo que el origen de cada uno coincida con la punta de flecha que señala el sentido del vector antecesor. El vector resultante se obtiene al trazar un vector que sale del origen del primer vector hasta el extremo final del último colocado (gráfica 1.14). Así, resulta una figura de varios lados o polígono irregular.

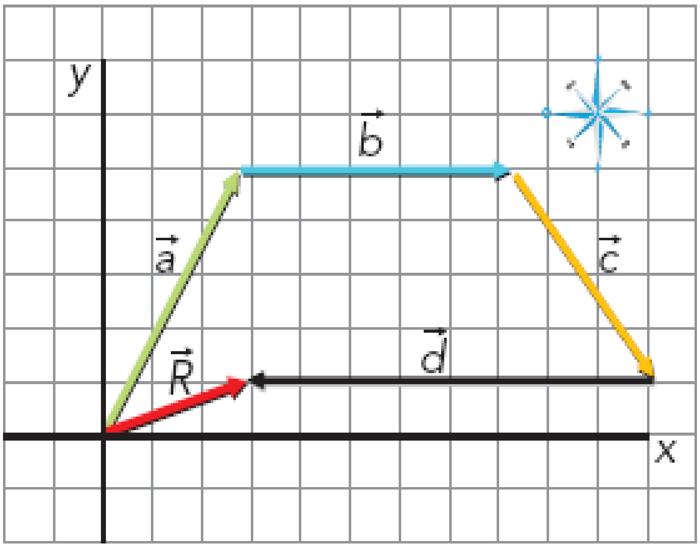


Imagen Tomada de Cuervo, Alfonso; Sin embargo se mueve; Oxford University Press 2013 México

Observe que el vector resultante puede ser más pequeño que el resto de los vectores sumandos.

2.2.2 Producto de un escalar y un vector

Multiplicar una cantidad escalar por un vector da como resultado el incremento del tamaño o módulo del vector en una proporción "n" veces directa el valor del escalar multiplicador.

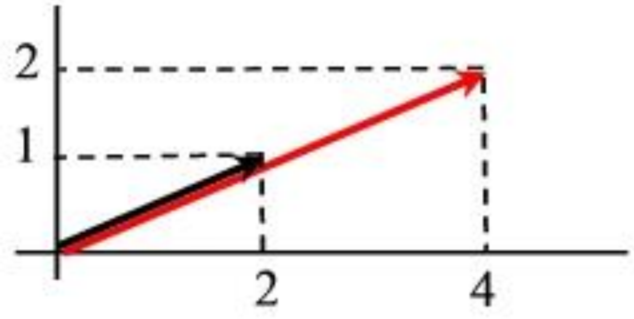
Así que si un vector de módulo o longitud con valor de 3 unidades se multiplica por un escalar de valor 2 unidades, el nuevo módulo será 6 unidades. La dirección (vertical, horizontal o inclinada) del vector no se altera, pero si su sentido (indicado por la punta de la flecha en uno de los extremos), en caso de que se multiplique por un escalar negativo, es decir, si un vector es multiplicado por un escalar negativo, el vector resultante crecerá "n" veces según el valor numérico absoluto del escalar y cambiará su sentido si es que el escalar es negativo.

Matemáticamente se realiza multiplicando al escalar por cada una de la componentes del vector.

Si por ejemplo el vector V tiene 2 coordenadas:

$V = (x, y)$ $k V = k (x, y) = (kx, ky)$

Ejemplo: V = (2,1)k = 2k V = 2 (2, 1) = (4, 2)

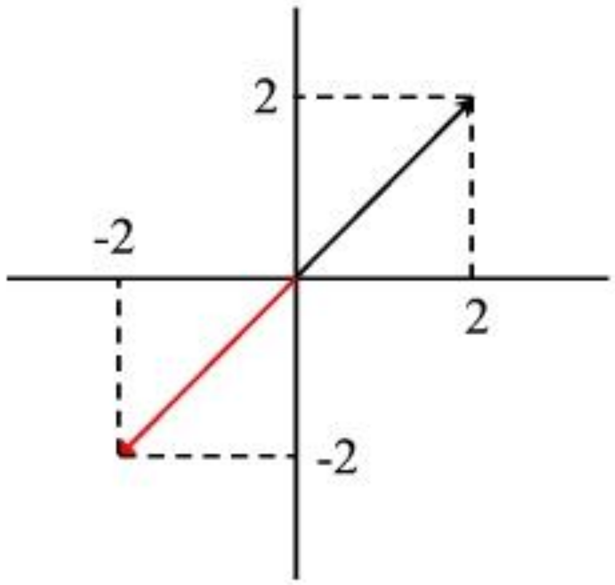


Ejemplo:

V= (2, 2)

k = -1

k V = -1 (2, 2) = (-2, -2)

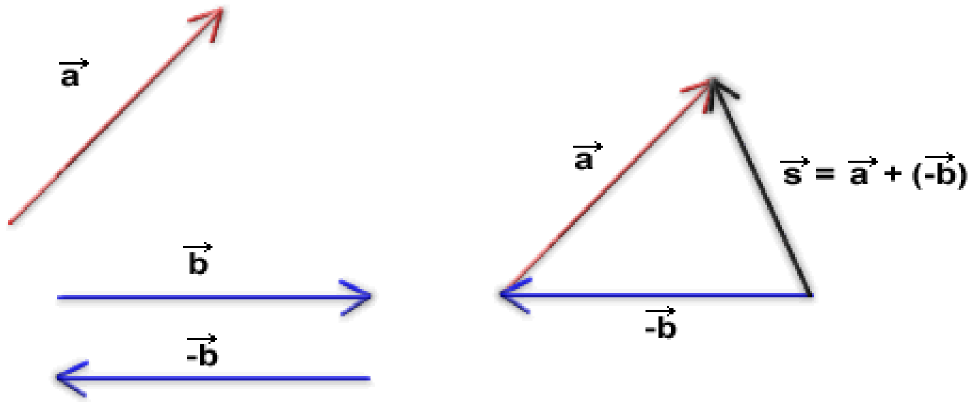


Si los vectores son de más de dos coordenadas se realiza lo mismo por cada una de ellas.

Ejemplo recopilado de http://www.fisicapractica.com/producto-escalar.php

2.2.3. Resta vectorial

Al igual que la resta arimética sigue las reglas y propiedades de la suma aritmética, se tienen las mismas propiedades en la resta vectorial con relación a la suma vectorial. El hecho de que un vector se reste de otro, significa que se tiene una suma de vectores en realidad, pero uno de los vectores al cambiar de signo cambiará de sentido. Vea la imagen siguiente:



2.2.4. Vectores unitarios

Un vector unitario es un vector cuyo módulo (longitud) mide la unidad.

Los vectores unitarios también son llamados vectores normalizados. Encontrar para cualquier vector dado un vector unitario correspondiente es sencillo. Sólo tenemos que dividir el vector que queremos normalizar entre la magnitud de su módulo.

Usando la fórmula $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

En el numerador de esta fórmula, estarán las coordenadas del vector que queremos normalizar y en el denominador colocaremos el valor de la magnitud del módulo que sencillamente se puede obtener usando el concepto del teoremá de pitágoras empleado para encontrar la longitud de una diagonal (hipotenusa) en un triángulo rectángulo con la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ donde C es la hipotenusa.

Vea el siguiente ejemplo:

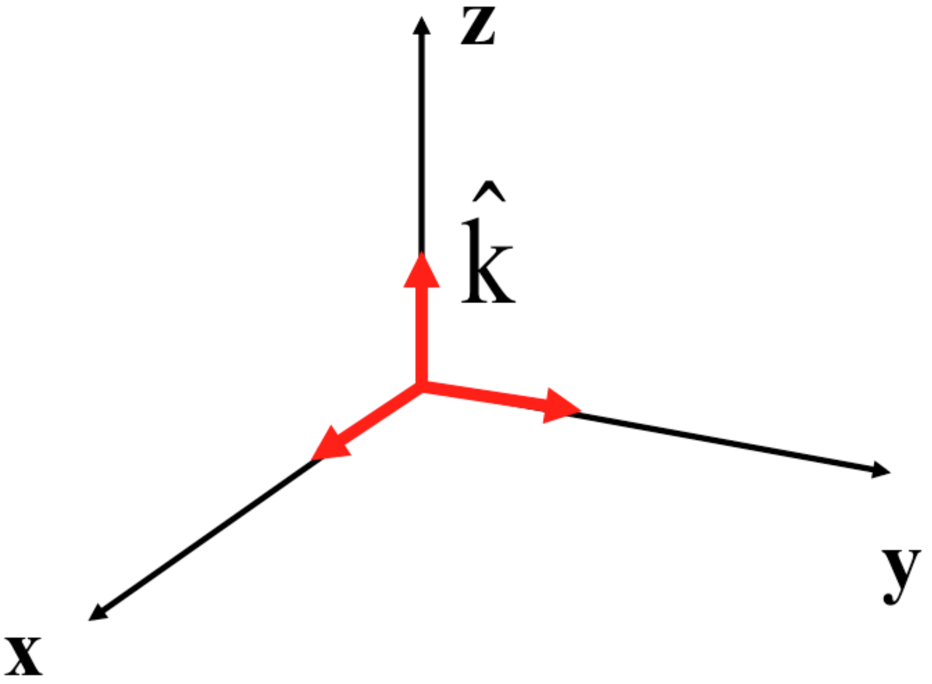
Si $\vec{v}$ es un vector de componentes (3, 4), hallar un **vector unitario** de su misma dirección y sentido.

$$\vec{v} = (3,\ 4) \qquad\qquad |\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

(Cálculo de la longitud del módulo del vector basado en teorema de Pitágoras)

$$\vec{u} = \frac{1}{5} \cdot (3,\ 4) \qquad\qquad \vec{u} = \left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

Vectores unitarios en el espacio



2.2.5.Componentes vectoriales

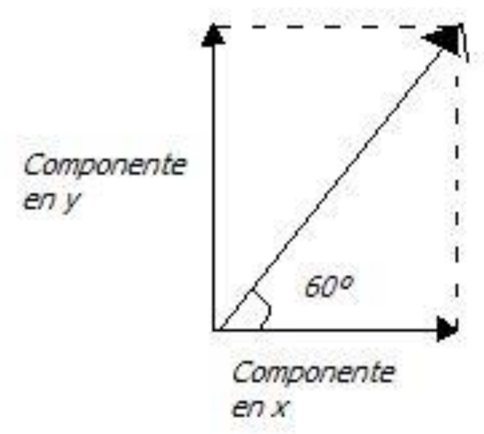
En general, las componentes de un vector son otros vectores, en direcciones perpendiculares. El eje de referencia principal más utilizado es el plano cartesiano.

Según éste marco de referencia, las componentes horizontales son vectores en dirección al eje x y las componentes verticales son vectores en dirección al eje y.

Las magnitudes de las componentes se encuentran relacionadas con la magnitud del vector principal por medio del *teorema de pitágoras*, tomando como catetos las componentes, y como hipotenusa el vector principal.

La dirección del vector principal relaciona también a las magnitudes de las componentes por medio de las relaciones trigonométricas conocidas para un triángulo rectángulo simple. Las relaciones más utilizadas son *el seno, coseno y tangente.*

Ejemplo. Encuentre la magnitud de las componentes en x e y del vector (3.5 u,60º).



La componente en x se puede encontrar fácilmente utilizando la relación del *coseno:*

$$\text{Cos}\theta = \frac{Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{Componente\ en\ x}{Vector\ principal}$$

Resolviendo: Componente en x = (3.5 u)*cos(60º) = *1.75 u.*

De manera similar, se puede encontrar la magnitud de la componente en y por medio de la relación del *seno;* pero además se conoce la magnitud del vector principal, lo cual permite utilizar *el* ***teorema de pitágoras****:*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Resolviendo:

$$\text{b} = \sqrt{(3.5)^2 - (1.75)^2}$$

Componente en y = *3.03 u*

En general, las componentes de un vector pueden verse como *efectos o proyecciones* a lo largo de los ejes x e y. Considere el vector V. Podemos escribir las componentes en x e y del vector V en términos de su magnitud V y su dirección θ:

- Componente en x, *o* $V_x = V \cos \theta$
- Componente en y, *o* $V_y = V \text{ sen } \theta$

donde θ es el ángulo, medido en dirección antihoraria, entre el vector V y el lado positivo del eje x.

Éste método mejora la precisión y la rapidez al determinar el vector resultante por medio del conocimiento de las componentes del vector; además tiene la ventaja de sumar o restar dos o más vectores a la vez, mediante un proceso algebraico.

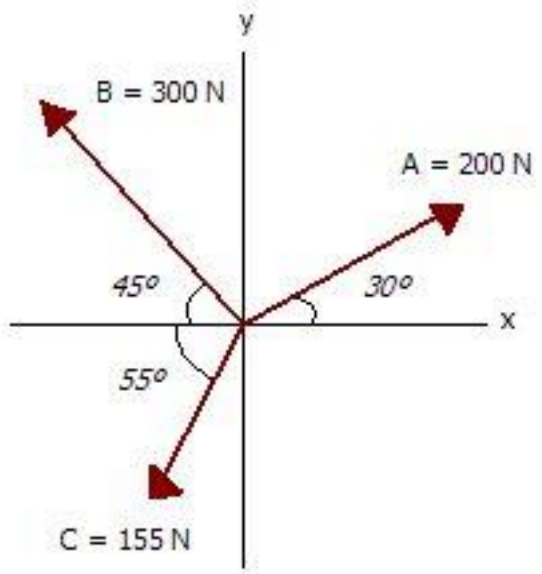
El método consiste en sumar o restar las componentes en x de los vectores principales, y el resultado de ésta operación es la componente en x del vector resultante.

De igual manera, se operan las componentes en y de los vectores principales y el resultado es la componente en y del vector resultante.

Obtenidas las componentes de la resultante, se pueden encontrar la magnitud, dirección y sentido de éste vector.

Cuando una componente, en x o en y, tiene un valor negativo, el sentido de ésa componente es contrario a los lados positivos del marco de referencia. Por ejemplo, si una componente en y tiene un valor negativo, la proyección en el eje y de ése vector apunta hacia abajo.

Ejemplo. Calcule la resultante de las fuerzas que se presentan en la figura.



Note que θ para los vectores B y C no son los que se presentan en la figura, sino que se deben calcular a partir del eje x positivo (ángulos suplementarios).

Para el vector B, $\theta = 180º - 45º = 135º$

Para el vector C, $\theta = 180º + 55º = 235º$

Calculando las componentes en x de los vectores A, B y C:

$Ax = (200\ N) \cos(30º) = 173.20\ N$

$Bx = (300\ N) \cos(135º) = -212.13\ N$

$Cx = (155\ N) \cos(235º) = -88.90\ N$

Calculando las componentes en y de los vectores A, B y C:

$Ay = (200\ N) \text{sen}(30º) = 100\ N$

$By = (300\ N) \text{sen}(135º) = 212.13\ N$

$Cy = (155\ N) \text{sen}(235º) = -126.97\ N$

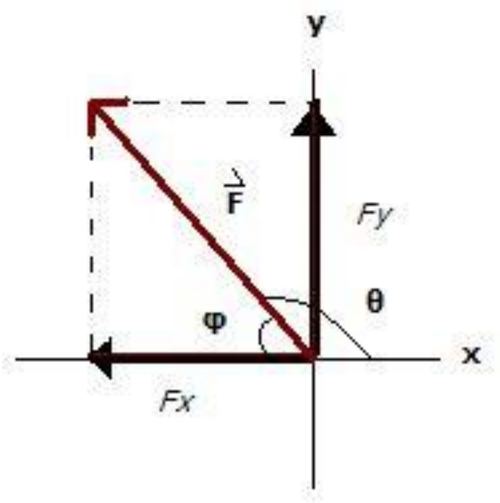
Luego se calcula la fuerza resultante, encontrando las componentes de ésta fuerza, a partir de una simple suma de componentes de fuerzas individuales.

La Fuerza Resultante **F** es la *suma de las fuerzas individuales*; es decir, de los vectores anteriores:

$Fx = Ax + Bx + Cx = 173.20\ N + (-212.13\ N) + (-88.90\ N) = -127.83\ N.$

$Fy = Ay + By + Cy = 100\ N + 212.13\ N + (-126.97\ N) = 185.16\ N.$

Si dibujamos esas componentes resultantes, obtenemos un vector como se muestra en la siguiente figura:



La magnitud del vector resultante se encuentra por el *teorema de pitágoras:*

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2} = \sqrt{(-127.83\ N)^2 + (185.16\ N)^2} = \mathbf{225\ N}.$$

Para el cálculo del ángulo θ, se introduce el valor de un nuevo ángulo φ, que es aquel formado por la componente en x del vector resultante y el vector resultante.

Esto se hace debido a que al utilizar una función trigonométrica que relacione las componentes, ésta es válida si y sólo si la relación es de un triángulo rectángulo. Para el caso, al encontrar φ, se puede calcular el valor de θ, así:

θ = 180º - φ

La función trigonométrica que relaciona las dos componentes es la de *tangente:*

$$\tan \varphi = \frac{|Fy|}{|Fx|},$$

$$\text{entonces: } \theta = 180° - \tan^{-1}\frac{(185.16\ N)}{(127.83\ N)} = 124.6°$$

Note que para utilizar la función trigonométrica se deben operar los valores absolutos de las magnitudes de las componentes, para que el resultado sea el valor absoluto del ángulo.

La relación θ = 180º - φ es válida para los vectores que estén en el 2º cuadrante del plano cartesiano; si el vector está en el 3º o 4º cuadrante, se procede así:

Tercer cuadrante: θ = 180º + φ

Cuarto cuadrante: θ = 360 º - φ