

6. MÉTODO SIMPLEX

El **Método Simplex** es un método analítico de solución de problemas de programación lineal capaz de resolver modelos más complejos que los resueltos mediante el método gráfico sin restricción en el número de variables.

El **Método Simplex** es un método iterativo que permite ir mejorando la solución en cada paso. La razón matemática de esta mejora radica en que el método consiste en caminar del vértice de un poliedro a un vértice vecino de manera que aumente o disminuya (según el contexto de la función objetivo, sea maximizar o minimizar), dado que el número de vértices que presenta un poliedro solución es finito siempre se hallará solución.

Este famosísimo método fue creado en el año de 1947 por el estadounidense George Bernard Dantzig y el ruso Leonid Vitalievich Kantorovich, con el ánimo de crear un algoritmo capaz de solucionar problemas de m restricciones y n variables.

6.1 ¿QUE ES UNA MATRIZ IDENTIDAD?

Una matriz puede definirse como una ordenación rectangular de elementos, (o listado finito de elementos), los cuales pueden ser números reales o complejos, dispuestos en forma de filas y de columnas.

La matriz idéntica o identidad es una matriz cuadrada (que posee el mismo número tanto de columnas como de filas) de orden que tiene todos los elementos diagonales iguales a uno (1) y todos los demás componentes iguales a cero (0), se denomina matriz idéntica o identidad de orden n, y se denota por:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

La importancia de la teoría de matrices en el Método Simplex es fundamental, dado que el algoritmo se basa en dicha teoría para la resolución de sus problemas.

6.2 OBSERVACIONES IMPORTANTES AL UTILIZAR MÉTODO SIMPLEX

6.2.1 VARIABLES DE HOLGURA Y EXCESO

El Método Simplex trabaja basándose en ecuaciones y las restricciones iniciales que se modelan mediante programación lineal no lo son, para ello hay que convertir estas inecuaciones en ecuaciones utilizando unas variables denominadas de holgura y

exceso relacionadas con el recurso al cual hace referencia la restricción y que en el tabulado final representa el "Slack or surplus" al que hacen referencia los famosos programas de resolución de investigación de operaciones, estas variables adquieren un gran valor en el análisis de sensibilidad y juegan un rol fundamental en la creación de la matriz identidad base del Simplex.

Estas variables suelen estar representadas por la letra "S", se suman si la restricción es de signo " \leq " y se restan si la restricción es de signo " \geq ".

Por ejemplo:

Inecuaciones modeladas mediante programación lineal

$$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 \leq 500$$

$$3X_1 + 1X_2 + 1X_3 \leq 700$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 800$$

Inecuaciones transformadas en ecuaciones

$$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 500$$

$$3X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 700$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 800$$

Matriz Identidad

Inecuaciones modeladas mediante programación lineal

$$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 \geq 500$$

$$3X_1 + 1X_2 + 1X_3 \geq 700$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 800$$

Inecuaciones transformadas en ecuaciones

$$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 - 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 500$$

$$3X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 0S_1 - 1S_2 + 0S_3 = 700$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 0S_1 + 0S_2 - 1S_3 = 800$$

6.2.2 VARIABLE ARTIFICIAL / MÉTODO DE LA "M"

Una variable artificial es un truco matemático para convertir inecuaciones " \geq " en ecuaciones, o cuando aparecen igualdades en el problema original, la característica principal de estas variables es que no deben formar parte de la solución, dado que no representan recursos. El objetivo fundamental de estas variables es la formación de la matriz identidad.

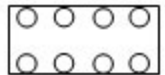



Estas variables se representa por la letra "A", siempre se suman a las restricciones, su coeficiente es M (por esto se le denomina Método de la M grande, donde M significa un número demasiado grande muy poco atractivo para la función objetivo), y el signo en la función objetivo va en contra del sentido de la misma, es decir, en problemas de Maximización su signo es menos (-) y en problemas de Minimización su signo es (+), repetimos con el objetivo de que su valor en la solución sea cero (0).

6.3 MÉTODO SIMPLEX PASO A PASO

6.3.1 EL PROBLEMA

La empresa el SAMÁN Ltda. Dedicada a la fabricación de muebles, ha ampliado su producción en dos líneas más. Por lo tanto actualmente fabrica mesas, sillas, camas y bibliotecas. Cada mesa requiere de 2 piezas rectangulares de 8 pines, y 2 piezas cuadradas de 4 pines. Cada silla requiere de 1 pieza rectangular de 8 pines y 2 piezas cuadradas de 4 pines, cada cama requiere de 1 pieza rectangular de 8 pines, 1 cuadrada de 4 pines y 2 bases trapezoidales de 2 pines y finalmente cada biblioteca requiere de 2 piezas rectangulares de 8 pines, 2 bases trapezoidales de 2 pines y 4 piezas rectangulares de 2 pines. Cada mesa cuesta producirla \$10000 y se vende en \$ 30000, cada silla cuesta producirla \$ 8000 y se vende en \$ 28000, cada cama cuesta producirla \$ 20000 y se vende en \$ 40000, cada biblioteca cuesta producirla \$ 40000 y se vende en \$ 60000. El objetivo de la fábrica es maximizar las utilidades.

REQUERIMIENTO DE PIEZAS POR PRODUCTO

				
Mesas	2	2	0	0
Sillas	1	2	0	0
Camas	1	1	2	0
Bibliotecas	2	0	2	4
Inventario	24	20	20	16

Problema planteado por Héctor Angulo - Ingeniero Industrial

PASO 1: MODELACIÓN MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL

Las variables:

X_1 = Cantidad de mesas a producir (unidades)

X_2 = Cantidad de sillas a producir (unidades)

X_3 = Cantidad de camas a producir (unidades)

X_4 = Cantidad de bibliotecas a producir (unidades)

Las restricciones:

$$2X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 2X_4 \leq 24$$

$$2X_1 + 2X_2 + 1X_3 \leq 20$$

$$2X_3 + 2X_4 \leq 20$$

$$4X_4 \leq 16$$

La función Objetivo:

$$Z_{\text{MAX}} = 20000X_1 + 20000X_2 + 20000X_3 + 20000X_4$$

PASO 2: CONVERTIR LAS INECUACIONES EN ECUACIONES

En este paso el objetivo es asignar a cada recurso una variable de Holgura, dado que todas las restricciones son " \leq ".

$$\begin{aligned}
2X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 2X_4 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 &= 24 \\
2X_1 + 2X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 + 0S_4 &= 20 \\
0X_1 + 0X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 + 0S_4 &= 20 \\
0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 4X_4 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 1S_4 &= 16
\end{aligned}$$

De esta manera podemos apreciar una matriz identidad ($n = 4$), formado por las variables de holgura las cuales solo tienen coeficiente 1 en su respectivo recurso, por el ejemplo la variable de holgura "S1" solo tiene coeficiente 1 en la restricción correspondiente a el recurso 1.

La función objetivo no sufre variaciones:

$$Z_{MAX} = 20000X_1 + 20000X_2 + 20000X_3 + 20000X_4$$

PASO 3: DEFINIR LA SOLUCIÓN BÁSICA INICIAL

El Método Simplex parte de una solución básica inicial para realizar todas sus iteraciones, esta solución básica inicial se forma con las variables de coeficiente diferente de cero (0) en la matriz identidad.

$$\begin{aligned}
1S_1 &= 24 \\
1S_2 &= 20 \\
1S_3 &= 20 \\
1S_4 &= 16
\end{aligned}$$

PASO 4: DEFINIR LA TABLA SIMPLEX INICIAL

	Cj									
Cb	Variable Solucion	Solucion								
	Zj									
	Cj - Zj									

Solución: (segundo término)= En esta fila se consigna el segundo término de la solución, es decir las variables, lo más adecuado es que estas se consignent de manera ordenada, tal cual como se escribieron en la definición de restricciones.

Cj = La fila "Cj" hace referencia al coeficiente que tiene cada una de las variables de la fila "solución" en la función objetivo.

Variable Solución = En esta columna se consigna la solución básica inicial, y a partir de esta en cada iteración se van incluyendo las variables que formarán parte de la solución final.

Cb = En esta fila se consigna el valor que tiene la variable que se encuentra a su derecha "Variable solución" en la función objetivo.

Zj = En esta fila se consigna la contribución total, es decir la suma de los productos entre término y Cb.

Cj - Zj = En esta fila se realiza la diferencia entre la fila Cj y la fila Zj, su significado es un "Shadow price", es decir, la utilidad que se deja de recibir por cada unidad de la variable correspondiente que no forme parte de la solución.

Solución inicial:

Función Objetivo
 $Z_{max} = 20000X_1 + 20000X_2 + 20000X_3 + 20000X_4$

Cj			20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
0	S1	24	2	1	1	2	1	0	0	0
0	S2	20	2	2	1	0	0	1	0	0
0	S3	20	0	0	2	2	0	0	1	0
0	S4	16	0	0	0	4	0	0	0	1
	Zj	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Cj - Zj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0

Matriz Identidad

$1S_1 = 24$
 $1S_2 = 20$
 $1S_3 = 20$
 $1S_4 = 16$
Solución Básica Inicial

Restricciones en el orden de la formulación

PASO 5: REALIZAR LAS ITERACIONES NECESARIAS

Este es el paso definitivo en la resolución por medio del Método Simplex, consiste en realizar intentos mientras el modelo va de un vértice del poliedro objetivo a otro.

El procedimiento a seguir es el siguiente:

1. Evaluar que variable entrará y cual saldrá de la solución óptima:

		Maximizar	Minimizar
Variable que entra		La más positiva de los $C_j - Z_j$	La más negativa de los $C_j - Z_j$
Variable que sale		Siendo b los valores bajo la celda solución y a el valor correspondiente a la intersección entre b y la variable que entra. La menos positiva de los b/a .	Siendo b los valores bajo la celda solución y a el valor correspondiente a la intersección entre b y la variable que entra. La más positiva de los b/a .

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0	
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4	b/a
0	S1	24	2	1	1	2	1	0	0	0	24/2 = 12
0	S2	20	2	2	1	0	0	1	0	0	20/0 = N/A
0	S3	20	0	0	2	2	0	0	1	0	20/2 = 10
0	S4	16	0	0	0	4	0	0	0	1	16/4 = 4
	Zj	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Cj - Zj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0	0

En este caso todos los $C_j - Z_j$ son iguales por ende la decisión se toma al azar "X4", por ende los valores "a" son los que se encuentran consignados en la columna "X4" es decir, 2 - 0 - 2 y 4 respectivamente. los valores "b" son 24 - 20 - 20 y 16 respectivamente. Cuando el valor de "a" es menor o igual a 0 este no se tiene en cuenta.

En la columna "b/a" se encuentran los resultados de la respectiva operación siendo el menos positivo el resultado 4, por ende la variable que sale es "S4".

2. El hecho de que una variable distinta forme parte de las variables solución implica una serie de cambios en el tabulado Simplex, cambios que se explicarán a continuación.

- Lo primero es no olvidar el valor del "a" correspondiente a la variables a entrar, en este caso el "a = 4".

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0	
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4	
0	S1										
0	S2										
0	S3										
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0.25
	Zj										
	Cj - Zj										
	S4	16	0	0	0	4	0	0	0	0	1

$a = 4$

Toda la fila saliente es dividida entre el valor del "a" de la variable entrante, en este caso 4

- Lo siguiente es comenzar a rellenar el resto de la tabla, fila x fila.

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
0	S1	16	2	1	1	0	1	0	0	-0.5
0	S2									
0	S3									
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj									
	Cj - Zj									

S1	24	2	1	1	2	1	0	0	0	0
----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0.25
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	------

Multiplicado por - (a), es decir, multiplicado por -2

=

-8	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	-0.5
----	---	---	---	----	---	---	---	---	---	------

Luego este resultado se le suma a los valores de la fila que se encontraba en la tabla anterior dando como resultado la nueva fila

- Se repite este procedimiento con las dos filas restantes, ahora se harán los cálculos correspondientes en el resto de las celdas.

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
0	S1	16	2	1	1	0	1	0	0	-0.5
0	S2	20	2	2	1	0	0	1	0	0
0	S3	12	0	0	2	0	0	0	1	-0.5
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	80000	0	0	0	20000	0	0	0	5000
	Cj - Zj		20000	20000	20000	0	0	0	0	-5000

Una vez consignados los valores de la matriz se procede a realizar los cálculos que permitan terminar la tabla correspondiente a la primera iteración.

Aquí se consigna la sumatoria de las multiplicaciones entre, "Cb * Solución"
 $(0 \cdot 16) + (0 \cdot 20) + (0 \cdot 12) + (20000 \cdot 4) = 80000$

Aquí se consigna la sumatoria de las multiplicaciones entre, "Cb y la matriz"
 $(0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) + (20000 \cdot 1) = 20000$

En esta fila se realiza la operación $C_j - Z_j$, por ejemplo:
 $(0 - 5000) = -5000$

Se repite el procedimiento

Cabe recordar que es esta fila la que define el final de las iteraciones, dependiendo de un criterio que veremos más adelante.

De esta manera se culmina la primera iteración, este paso se repetirá cuantas veces sea necesario y solo se dará por terminado el método según los siguientes criterios.

	Maximizar	Minimizar
Solución Óptima	Cuando todos los $C_j - Z_j$ sean ≤ 0	Cuando todos los $C_j - Z_j$ sean ≥ 0

- Continuamos con las iteraciones para lo cual tenemos que repetir los pasos anteriores.

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
	S1	6	1	0	0.5	0	1	-0.5	0	-0.5
20000	X2	10	1	1	0.5	0	0	0.5	0	0
	S3	12	0	0	2	0	0	0	1	-0.5
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	90000	20000	20000	10000	20000	0	10000	0	5000
	Cj - Zj		0	0	10000	0	0	-10000	0	-5000

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
20000	X1	6	1	0	0.5	0	1	-0.5	0	-0.5
20000	X2	4	0	1	0	0	-1	1	0	0.5
	S3	12	0	0	2	0	0	0	1	-0.5
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	280000	20000	20000	10000	20000	0	10000		5000
	Cj - Zj		0	0	10000	0	0	-10000	0	-5000

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
20000	X1	3	1	0	0	0	1	-0.5	-0.25	-0.375
20000	X2	4	0	1	0	0	-1	1	0	0.5
20000	X3	6	0	0	1	0	0	0	0.5	-0.25
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	340000	20000	40000	20000	20000	0	10000	5000	2500
	Cj - Zj		0	-20000	0	0	0	-10000	-5000	-2500

En esta última iteración podemos observar que se cumple con la consigna $C_j - Z_j \leq 0$, para ejercicios cuya función objetivo sea "Maximizar", por ende hemos llegado a la respuesta óptima.

$$X_1 = 3$$

$$X_2 = 4$$

$$X_3 = 6$$

$$X_4 = 4$$

Con una utilidad de: \$ 340000

Sin embargo una vez finalizado el Método Simplex se debe observar una matriz identidad en el rectángulo determinado por las variables de decisión, el hecho de que en este caso no se muestre la matriz identidad significa que existe una solución óptima alterna.

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
20000	X1	3	1	1	0	0	1	-0.5	-0.25	0.125
20000	X2	4	0	1	0	0	-1	1	0	0.5
20000	X3	6	0	0	1	0	0	0	0.5	-0.25
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	340000	20000	40000	20000	20000	0	10000	5000	12500
	Cj - Zj		0	-20000	0	0	0	-10000	-5000	-12500

Este valor impide que se forme la matriz identidad con las variables de decisión lo cual indica que existe una solución óptima alterna.

La manera de llegar a la otra solución consiste en alterar el orden en que cada una de las variables entro a la solución básica, recordemos que el proceso fue decidido al azar debido a la igualdad en el $C_j - Z_j$ del tabulado inicial. Aquí les presentamos una de las maneras de llegar a la otra solución.

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
0	S1	24	2	1	1	2	1	0	0	0
0	S2	20	2	2	1	0	0	1	0	0
0	S3	20	0	0	2	2	0	0	1	0
0	S4	16	0	0	0	4	0	0	0	1
	Zj	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Cj - Zj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
0	S1	16	2	1	1	0	1	0	0	-0.5
0	S2	20	2	2	1	0	0	1	0	0
0	S3	12	0	0	2	0	0	0	1	-0.5
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	80000	0	0	0	20000	0	0	0	5000
	Cj - Zj		20000	20000	20000	0	0	0	0	-5000

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
0	S1	10	2	1	0	0	1	0	-0.5	0.25
0	S2	14	2	2	0	0	0	1	-0.5	0.25
20000	X3	6	0	0	1	0	0	0	0.5	-0.25
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	200000	0	0	20000	20000	0	0	10000	0
	Cj - Zj		20000	20000	0	0	0	0	-10000	0

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
0	S1	3	1	0	0	0	1	-0.5	-0.25	0.125
20000	X2	7	1	1	0	0	0	0.5	-0.25	0.125
20000	X3	6	0	0	1	0	0	0	0.5	-0.25
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	340000	20000	20000	20000	20000	0	10000	5000	2500
	Cj - Zj		0	0	0	0	0	-10000	-5000	-2500

Podemos observar como existe una solución óptima alternativa en la cual la combinación de variables es distinta y existe un menor consumo de recursos, dado que el hecho de que se encuentre la variable "S1" en la solución óptima con un coeficiente de "3" significa que se presenta una holgura de 3 unidades del recurso (pieza rectangular de 8 pines).

$X_1 = 0$ (Cantidad de mesas a producir = 0)

$X_2 = 7$ (Cantidad de sillas a producir = 7)

$X_3 = 6$ (Cantidad de camas a producir = 6)

$X_4 = 4$ (Cantidad de bibliotecas a producir = 4)

$S_1 = 3$ (Cantidad de piezas rectangulares de 8 pines sin utilizar =3)

Con una utilidad de: \$ 340000

6.4 PROBLEMAS DE MINIMIZACIÓN CON EL MÉTODO SIMPLEX

Para resolver problemas de minimización mediante el algoritmo simplex existen dos procedimientos que se emplean con regularidad.

- El primero, que a mi juicio es el más recomendable se basa en un artificio aplicable al algoritmo fundamentado en la lógica matemática que dicta que "para cualquier función $f(x)$, todo punto que minimice a $f(x)$ maximizará también a $-f(x)$ ". Por lo tanto el procedimiento a aplicar es multiplicar por el factor negativo (-1) a toda la función objetivo.

$$Z_{\text{MIN}} = X_1 - 3X_2 \quad \text{se reescribe} \quad (-Z)_{\text{MAX}} = -X_1 + 3X_2$$

a continuación se resuelve el algoritmo como un problema de maximización.

- El segundo procedimiento, el cual pretende conservar la minimización consiste en aplicar los criterios de decisión que hemos esbozado con anterioridad, en los casos de la variable que entra, que sale y el caso en el que la solución óptima es encontrada. Aquí recordamos los procedimientos según el criterio dado el caso "minimizar".

Minimizar	
Variable que entra	La más negativa de los $(C_j - Z_j)$
Variable que sale	Siendo " b " los valores bajo la celda solución y " a " el valor correspondiente a la intersección entre " b " y la variable que entra. La más positiva de los " b/a ".
Solución Óptima	Cuando todos los $(C_j - Z_j)$ sean ≥ 0 .