

3 AJUSTE DE FUNCIONES

3.1. Fundamentos de estadística: conjunto de mediciones experimentales, media y desviación estándar

INTRODUCCION TEÓRICA

En la mayoría de los procedimientos experimentales se gasta mucho esfuerzo para reunir los datos y hoy en día la mayoría se han convertido en datos cuantitativos; esto quiere decir que se derivan de mediciones. Cuando se realiza cualquier medición es necesario considerar que se puede cometer errores y es importante desarrollar habilidades para evaluar los datos y sacar conclusiones que estén realmente justificadas.

La mayoría de las técnicas que consideramos para dicha evaluación de datos están basadas en conceptos estadísticos. Cada vez más se reconoce que los métodos estadísticos son eficaces en la planificación de los experimentos que darán la mayor información a partir del mínimo número de mediciones, y para “abreviar” los datos en tal forma que su significado se presente en forma concisa. Por otro lado y como punto muy importante, no debe esperarse que la estadística disminuya la necesidad de obtener buenas mediciones, tomando en cuenta que los métodos estadísticos son más poderosos cuando se aplican a datos válidos.

En esta práctica es imposible examinar los fundamentos de la teoría de probabilidad, en la cual se basa gran parte de la estadística que se aplicará. Aquí debemos aceptar las conclusiones matemáticas y probabilísticas y luego intentar ver como pueden ser útiles.

ERRORES

El término error se utiliza para referirse a la diferencia numérica entre el valor medido y el valor real. El valor real de cualquier cantidad es en realidad una abstracción filosófica, algo que el hombre no está destinado a conocer, aunque los científicos sienten que existe y piensan que pueden tener acceso a él, más y más estrechamente, cuando sus mediciones llegan a ser más refinadas.

Errores determinados

Los errores que pueden ser atribuidos a causas definidas, se llaman errores determinados o sistemáticos. De acuerdo con su origen, tienen lugar debido a: a) el método de análisis que refleja las propiedades de los sistemas químicos involucrados, b) la ineptitud del operador c) la avería de los aparatos de medición que no le permiten funcionar de acuerdo a los estándares requeridos. Ejemplos de errores sistemáticos son, el analista tiene una mala técnica en la balanza, el material de vidrio está sucio, etc.

Dentro de los errores determinados existe otro tipo, error instrumental, que es muy fácil de determinar en los instrumentos de medida analógica, dicho error se estima de la siguiente forma,

$$E = \frac{A}{2}$$

Donde A es la apreciación del instrumento y puede determinarse a partir de la diferencia de las lecturas de dos valores marcados en el instrumento y el número de divisiones que existen entre ellos de acuerdo a:

$$A = \frac{\text{Lectura Mayor} - \text{Lectura Menor}}{\text{N}^\circ \text{ de Divisiones}}$$

En algunos equipos volumétricos, empleados en química, tales como: pipetas volumétricas, el error cometido en la lectura es especificado por el fabricante; los cuales oscilan entre un 0,5% del volumen leído, en equipos de precisión y un 10% en equipos menos precisos.

Para los equipos digitales el error instrumental se toma el error en la última cifra que aparece en la pantalla. Así por ejemplo, si en la pantalla aparece 12,04 el error instrumental será $\pm 0,01$ y se debe reportar: $12,04 \pm 0,01$.

Errores indeterminados

Los errores que se clasifican como indeterminados son aquellos que ocurren a pesar de ser muy cuidadoso y meticulado. Son errores fortuitos que no pueden reducirse más.

EXACTITUD Y PRECISIÓN

Los términos exactitud y precisión que en una conversación ordinaria se utilizan muchas veces como sinónimos, se deben distinguir con cuidado en relación con los datos científicos ya que no significan lo mismo. Un resultado exacto es aquel que concuerda de cerca con el valor real de una cantidad medida. La comparación se hace con frecuencia basándose en una medida inversa de la exactitud, que es el error (mientras más pequeño es el error, mayor es la exactitud). El error absoluto es la diferencia entre el valor experimental y el valor real. Por ejemplo, si un analista encuentra 20,44% de hierro en una muestra que en realidad contiene 20.34%, el error absoluto (E_a) es

$$E_a = 20,44\% - 20,34\% = 0,10\%$$

El error se expresa con mucha frecuencia como relativo al tamaño de la cantidad medida, por ejemplo, en porcentaje. Aquí el error relativo (E_R) es

$$E_R = \frac{0,10 \%}{20,34 \%} \times 100 = 0,5 \%$$

El término precisión se refiere a la concordancia que tienen entre sí un grupo de resultados experimentales; no tiene relación con el valor real. Los valores precisos pueden ser inexactos, ya que un error que causa desviación del valor real puede afectar todas las mediciones en igual forma y por consiguiente no perjudicar su precisión. La precisión se expresa por lo general en términos de la desviación estándar. Este término se definirá más adelante. Como en el caso del error (mencionado anteriormente), precisión puede expresarse en forma absoluta o relativa.

TRATAMIENTO ESTADISTICO DE MUESTRAS FINITAS

Después que se buscaron los errores determinados hasta donde fue posible y se tomaron todas las precauciones y se aplicaron las correcciones, se encuentra que las fluctuaciones restantes en los datos son, por naturaleza, al azar. Los resultados o datos dispersos de una manera al azar se analizan mejor por medio de las poderosas técnicas de la estadística. Nuestro objetivo será ahora mostrar como se aplica un pequeño número de estas técnicas y qué información nos proporcionan, más allá de lo que se puede observar o concluir con una inspección simple de los datos.

Medidas de tendencia central

La tendencia central de un grupo de datos es sencillamente el valor alrededor del cual los resultados individuales tienden a “amontonarse”. La media, x , es una medida de tendencia central y su cálculo solo implica obtener el promedio de los resultados individuales:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Por lo general, la media es la medida más útil de la tendencia central. También existen la mediana, que en un número impar de datos es el dato del medio y la moda que

corresponde al dato que más se repite. Hablando en términos generales la mediana y la moda son medidas de tendencia central mucho menos eficientes que la media.

Medidas de variabilidad

Para un número finito de valores, la medida más simple de variabilidad es el rango, el cual es la diferencia entre el valor más grande menos el más pequeño. Al igual que la mediana, el rango es útil algunas veces en la estadística de muestras pequeñas, pero hablando en general, es una medida ineficaz de la variabilidad. Notemos, por ejemplo, que un resultado “disparatado” ejerce un fuerte impacto sobre el rango.

En estadística, la desviación estándar es mucho más significativa que el rango. Para un número finito de valores se utiliza el símbolo s para denotar la desviación estándar. La desviación estándar se calcula empleando la siguiente fórmula.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

x_i = Cada uno de los valores observados

\bar{x} = Media

N = Número de determinaciones

Si N es grande (digamos que 30 o más), entonces, por supuesto, es imperceptible que el término en el denominador sea $N-1$ (lo cual es estrictamente correcto) o N , recuerde esta premisa al momento de realizar el cálculo directo con la calculadora ya que la mayoría posee ambas formas de dicho cálculo.

Cuando la desviación estándar se expresa como un porcentaje de la media, se llama coeficiente de variación, CV o desviación estándar relativa, DSR:

$$CV = DSR = \frac{s}{\bar{x}} \times 100$$

La desviación estándar relativa suele proporcionar más información que las desviaciones estándar absolutas ya que permite comparar variaciones de dos o más grupos de datos independientemente de cada una de las medias o promedios.

3.2. Interpolación

En el subcampo matemático del análisis numérico, se denomina **interpolación** a la construcción de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto discreto de puntos.

En ingeniería y algunas ciencias es frecuente disponer de un cierto número de puntos obtenidos por muestreo o a partir de un experimento y pretender construir una función que los ajuste.

Otro problema estrechamente ligado con el de la interpolación es la aproximación de una función complicada por una más simple. Si tenemos una función cuyo cálculo resulta costoso, podemos partir de un cierto número de sus valores e interpolar dichos datos construyendo una función más simple. En general, por supuesto, no obtendremos los mismos valores evaluando la función obtenida que si evaluásemos la función original, si bien dependiendo de las características del problema y del método de interpolación usado la ganancia en eficiencia puede compensar el error cometido.

En todo caso, se trata de, a partir de n parejas de puntos (x_k, y_k) , obtener una función f que verifique

$$f(x_k) = y_k, \quad k = 1, \dots, n$$

En todo este tema has visto distintas maneras de expresar una función. Has visto, por ejemplo, que en numerosas ocasiones las funciones se expresan mediante tablas de valores obtenidos de la observación o de la experimentación. También has visto que cuando la función puede ser expresada mediante una relación matemática (en especial una relación matemática sencilla) es muy fácil obtener información de la misma. Por lo tanto, un problema con el que nos tendremos que enfrentar con frecuencia es cómo obtener una expresión matemática que represente la función que estamos estudiando cuando los datos los hemos obtenido experimentalmente o mediante observación de algún fenómeno.

En la mayoría de los casos este problema es demasiado complejo para resolverlo, por lo que nos conformaremos con una aproximación. El proceso por el que a una tabla de valores se le asocia una expresión matemática que la represente se denomina **Interpolación**. La función obtenida debe representar de forma exacta los valores de la tabla, pero no proporciona más que una estimación de los valores que no aparezcan en la tabla.

Una vez que hemos aceptado que no vamos a dar con una expresión exacta sino aproximada, surge otro problema. ¿De qué tipo es la función con la que vamos a

realizar la aproximación? o dicho de una manera más rigurosa **¿qué tipo de interpolación vamos a hacer?**

La representación gráfica de los puntos de la tabla nos puede dar una idea, pues los puntos que se representen pueden mostrar una tendencia. Por ejemplo, si resulta que los puntos parecen estar alineados debemos buscar una función lineal para representarlos. Diremos en ese caso que realizamos una **interpolación lineal**. Si la apariencia de los puntos se asemeja a una parábola realizaríamos una **interpolación cuadrática**. Y así con cualquier tipo de función cuyo aspecto conociéramos previamente.

En la práctica puede suceder que no dispongamos de puntos suficientes para adivinar la tendencia, o que aún teniendo puntos suficientes, la gráfica no se parezca a nada conocido. Existen procedimientos bastante complejos para interpolar ese tipo de funciones, pero que no están a nuestro alcance. En una situación de este tipo nosotros nos conformaremos con una interpolación lineal entre cada pareja de puntos, obteniendo una función definida a trozos y cada trozo definido por una función lineal.

3.2.1. Directa

Este método es el resultado de considerar que dos puntos están tan cerca estadísticamente que la media entre ellos supondrá un punto intermedio.

3.2.2. Lineal

Método para estimar un valor que quede entre dos puntos de datos, trazando una línea recta entre esos dos puntos

3.2.3. Cuadrática

Hay casos en que no se observa una variación regular. Por ejemplo, el precio medio (en pts.) de una tonelada de cobre entre 1962 y 1964, que se indica en la tabla :

año :x	62	63	64
producción :y	50.266	50.475	74.190

Se observa un aumento considerable en el año 64 por lo que, si aplicásemos una interpolación lineal tomando como datos los de 1962 y 1964 y calculásemos el valor estimado para 1963 veríamos que la

aproximación no es aceptable ya que se desvía mucho del valor real (más de un 23%).

En estos casos es aconsejable hacer una interpolación cuadrática que consiste en efectuar la aproximación a través de un polinomio de segundo grado (una parábola).

El proceso de **interpolación** consiste en, tomando tres puntos conocidos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , encontrar la ecuación de una parábola $y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ que pase por ellos.

Los coeficientes de este polinomio se calculan resolviendo el sistema que resulta de sustituir en la expresión anterior las coordenadas de los puntos conocidos :

$$a_2 \cdot x_1^2 + a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1$$

$$a_2 \cdot x_2^2 + a_1 \cdot x_2 + a_0 = y_2$$

$$a_2 \cdot x_3^2 + a_1 \cdot x_3 + a_0 = y_3$$

Una vez determinados los coeficientes, para hallar el valor correspondiente a un x_k del intervalo (x_1, x_3) basta sustituir en $a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$.

La interpolación cuadrática supone un avance sobre la lineal pues la gráfica de una parábola se ajusta mejor a la disposición de los puntos conocidos cuando éstos no presentan una alineación clara y sí un crecimiento o decrecimiento cada vez más pronunciado.

La **interpolación inversa** exige despejar la x en la igualdad anterior :

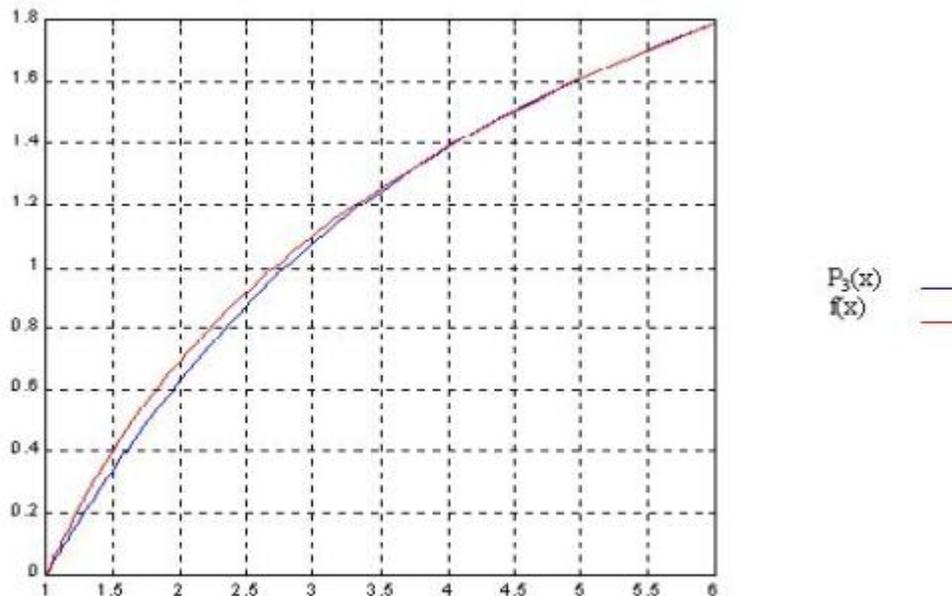
$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 \cdot (a_0 - y)}}{2a_2}$$

y sustituir aquí el valor y_h conocido para así hallar x_h .

La **extrapolación** se hace aplicando el polinomio interpolador a un valor x_p no perteneciente al intervalo (x_1, x_3) . Este punto debe ser suficientemente próximo a los extremos del intervalo para obtener resultados aceptables

x_k	$f(x_k) = \ln(x_k)$	Método de Newton		Método de Lagrange	
		$P_3(2)$	$f(2) - P_3(2)$	$P_3(2)$	$f(2) - P_3(2)$
1	0				
6	1.7917595				

4	1.3862944	0.628784	0.06436318	0.6287687 0.0643785
5	1.6094379			



Apartado d): Estimación del error del polinomio de interpolación de Newton de segundo orden

$$R_2(2) = (2-1)(2-4)(2-6) f(1 \ 4 \ 6 \ 5) = 8 * 0.00786553 = 0.06292424$$

Cota del error del polinomio de interpolación de Newton de tercer orden

$$R_3(x) = \prod_{i=0}^3 (x - x_i) \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \quad \text{con } \xi \text{ entre } x_0 \text{ y } x_4, \quad f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$$

$$R_3(2) = (2-1)(2-4)(2-5)(2-6)(-6\xi^{-4}) / 24 = 6\xi^{-4}, \text{ para } 1 < \xi < 6, \text{ obtenemos}$$

$$6 \cdot 5^{-4} \leq E(2) \leq 6 \cdot 4^{-4}, \text{ es decir, } 0.0096 \leq E(2) \leq 0.023475$$

Apartado e): Cota del error del polinomio de interpolación de Lagrange de tercer orden

$$R_3(x) = \prod_{i=0}^3 (x - x_i) \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \quad \text{con } \xi \text{ entre } x_0 \text{ y } x_3, \quad f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$$

$$R_3(2) = (2-1)(2-4)(2-5)(2-6)(-6\xi^{-4}) / 24 = 6\xi^{-4}, \text{ para } 1 < \xi < 6, \text{ obtenemos}$$

$$6 \cdot 5^{-4} \leq E(2) \leq 6 \cdot 4^{-4}, \text{ es decir, } 0.0096 \leq E(2) \leq 0.023475$$

Conclusiones a las que arribaron los alumnos luego de realizar esta actividad:

1. En el apartado a) se usan dos interpolaciones lineales para aproximar $\ln 2$. El intervalo más pequeño proporciona una mejor aproximación.

Los resultados obtenidos con el polinomio de interpolación de Lagrange están en estrecha concordancia con los obtenidos usando la interpolación polinomial de Newton con diferencias divididas.

2. La interpolación cuadrática realizada en el apartado b) mejora la interpolación comparada con los resultados obtenidos al usar una línea recta.

Los resultados obtenidos con el polinomio de interpolación de Lagrange están en estrecha concordancia con los obtenidos usando la interpolación polinomial de Newton con diferencias divididas.

3. La interpolación cúbica realizada en el apartado c) mejora la interpolación comparada con los resultados obtenidos al usar una línea recta o una parábola.

Los resultados obtenidos con el polinomio de interpolación de Lagrange están en estrecha concordancia con los obtenidos usando la interpolación polinomial de Newton con diferencias divididas.

4. La estimación del error obtenido en el apartado d) es del mismo orden que el error verdadero obtenido en el apartado b). Las cotas del error obtenidas en d) y en e) coinciden, como era de esperarse.

5. Si no se conoce la función, la fórmula de Newton es mejor porque permite ir analizando el polinomio de interpolación a partir de las diferencias divididas de orden superior obtenidas. Además, a partir de las mismas se puede obtener una estimación del error cometido en la aproximación.

3.2.4. Polinomial de Lagrange

Presentamos ahora una forma alternativa del polinomio de interpolación $P(x)$ asociado con una tabla de datos (x_i, y_i) con $0 \leq i \leq n$. Es importante entender que existe uno y solo un polinomio de interpolación de grado $\leq n$ asociado con los datos (suponiendo, claro esta, que las $n+1$ abscisas x_i son distintas). Sin embargo, existe ciertamente la posibilidad de expresar este polinomio de maneras distintas y de llegar a el a través de distintos algoritmos.

El problema al utilizar Polinomio de Newton para aproximar es que se debe tener la derivada y muchas veces este lado no se tiene; una forma de evitar esto es trabajar con una interpolación de Lagrange, que es una reformulación del Polinomio de Newton que evita las diferencias divididas y se representa como:

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)F(x_i) + R_n \quad (3.3.1.2)$$

Donde $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$; \square es productoria y R_n es el error.

Para obtener el polinomio de grado uno (lineal) reemplazamos $n=1$

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_{i=0}^1 L_i(x)F(x_i) \\ &= L_0(x)F(x_0) + L_1(x)F(x_1) \end{aligned}$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n=1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$F_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Ahora calcularemos el polinomio de interpolación de grado dos (Cuadrático), haciendo $n=2$:

$$F_2(x) = \sum_{i=0}^2 L_i(x)F(x_i)$$

$$= L_0(x)F(x_0) + L_1(x)F(x_1) + L_2(x)F(x_2)$$

$$F_2(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) + \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

La aproximación del polinomio cúbico es:

$$F_3(x) = \sum_{i=0}^3 L_i(x)F(x_i)$$

$$= L_0(x)F(x_0) + L_1(x)F(x_1) + L_2(x)F(x_2) + L_3(x)F(x_3)$$

$$F_3(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \frac{x-x_3}{x_0-x_3} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{x-x_3}{x_1-x_3} f(x_1)$$

$$+ \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{x-x_3}{x_2-x_3} f(x_2) + \frac{x-x_0}{x_3-x_0} \frac{x-x_1}{x_3-x_1} \frac{x-x_2}{x_3-x_2} f(x_3)$$

La ecuación (3.3.3.2) se obtiene de manera directa del polinomio de Newton, sin embargo, el razonamiento detrás de la formulación de Lagrange se comprende directamente al darse cuenta que cada término $L_i(x)$ será 1 en $x=x_i$ y 0 en todos los otros puntos (Ver figura). De esta forma, cada producto $L_i(x) f(x_i)$ toma el valor de $f(x_i)$ en el punto x_i . En consecuencia, la sumatoria de todos los productos en la ecuación (3.3.2) es el único polinomio de n -ésimo grado que pasa exactamente a través de todos los $n+1$ puntos, que se tienen como datos.

Descripción visual del razonamiento detrás del polinomio de Lagrange. Esta figura muestra un caso de segundo grado. Cada uno de los tres términos de la ecuación (3.3.2) pasa a través de uno de los puntos que se tienen como datos y es cero en los otros dos. La suma de los tres términos, por lo tanto, debe ser el único polinomio de segundo grado $f_2(x)$ que pasa exactamente a través de los tres puntos.

EJEMPLO

Con un polinomio de interpolación de Lagrange de primero, segundo y tercer grado evalué $\sqrt{1,5}$; basándose en los datos dados a continuación:

$x_0 =$	1	$f(x_0) =$	1
$x_1 =$	2	$f(x_1) =$	1,414213
$x_2 =$	3	$f(x_2) =$	1,732050
$x_3 =$	4	$f(x_3) =$	2

Solución:

Primero hallamos el polinomio lineal:

$$F_1(x) = \frac{x-2}{1-2}(1) + \frac{x-1}{2-1}(1,414213) = 0,414213x + 0,585787 \Rightarrow F_1(1,5) = 1,2071065$$

Ahora hallamos el polinomio cuadrático:

$$F_2(x) = \frac{x-2}{1-2} \frac{x-3}{1-3}(1) + \frac{x-1}{2-1} \frac{x-3}{2-3}(1,414213) + \frac{x-1}{3-1} \frac{x-2}{3-2}(1,732050) \Rightarrow F_2(1,5) = 1,219153825$$

Finalmente el polinomio cúbico es:

$$F_3(x) = \frac{x-2}{1-2} \frac{x-3}{1-3} \frac{x-4}{1-4} (1) + \frac{x-1}{2-1} \frac{x-3}{2-3} \frac{x-4}{2-4} (1.414213) + \frac{x-1}{3-1} \frac{x-2}{3-2} \frac{x-4}{3-4} (1.732050) + \frac{x-1}{4-1} \frac{x-2}{4-2} \frac{x-3}{4-3} (2)$$

$$F_3(x) = 1.22205934$$

Como se esperaba, ambos resultados concuerdan con los que se obtuvieron antes al usar el polinomio de interpolación de Newton.

3.2.5. Polinomio de Newton, Diferencias divididas

Uno de estas formas de interpolación se denomina Polinomios de Interpolación de

Newton, que trabaja directamente en la tabla obtenida mediante el proceso de Diferencias Divididas; En el desarrollo de estas diferencias finitas, se obtuvo en primer lugar las diferencias finitas ordinarias y luego las diferencias finitas divididas, para lo cual haremos una introducción rápida a dichas diferencias:

DIFERENCIAS FINITAS ORDINARIAS

Estas se definen para funciones evaluadas sobre valores discretos equidistantes, es decir, sea F definida sobre $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$

Se define $\Delta F_k = F_{k+1} - F_k \rightarrow$ Diferencia finita hacia adelante

1.1. Propiedades

$$1.1.1. \quad \Delta(cF_k) = cF_{k+1} - cF_k$$

$$= c(F_{k+1} - F_k) = c\Delta F_k$$

$$1.1.2. \quad \Delta(F_k + G_k) = F_{k+1} + G_{k+1} - (F_k + G_k) = F_{k+1} + G_{k+1} - F_k - G_k$$

$$= F_{k+1} - F_k + G_{k+1} - G_k = \Delta F_k + \Delta G_k$$

$$1.1.3. \quad \Delta^n (\Delta^m F_k) = \Delta^{n+m} F_k$$

EJEMPLO:

$$\text{♪} \quad \Delta^2 F_k = \Delta(\Delta F_k) = \Delta(F_{k+1} - F_k) = \Delta(F_{k+1}) - \Delta(F_k)$$

$$\begin{aligned}
&= F_{k+2} - F_{k+1} - F_{k+1} + F_k \\
&= F_{k+2} - 2F_{k+1} + F_k \\
\text{♫ } \Delta^3 F_k &= \Delta(\Delta^2 F_k) = \Delta(F_{k+2} - 2F_{k+1} + F_k) = \Delta F_{k+2} - \Delta(2F_{k+1}) + \Delta F_k \\
&= F_{k+3} - F_{k+2} - 2F_{k+2} + 2F_{k+1} + F_{k+1} - F_k \\
&= F_{k+3} - 3F_{k+2} + 3F_{k+1} - F_k \\
\text{♫ } \Delta^n F_k &= \binom{n}{0} F_{k+n} - \binom{n}{1} F_{k+(n-1)} + \binom{n}{2} F_{k+(n-2)} + \dots + (-1)^n \binom{n}{m} \\
\Delta^n F_k &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} F_{k+(n-i)}
\end{aligned}$$

DIFERENCIAS FINITAS DIVIDIDAS

Sea F una función de valor real definida sobre $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}$ **no necesariamente equidistante**. Se define:

$$F(x_k, x_{k+1}) = \frac{F(x_k) - F(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} \rightarrow \text{Primer grado}$$

$$F(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = \frac{F(x_k, x_{k+1}) - F(x_{k+2})}{x_k - x_{k+2}} \rightarrow 2^\circ \text{ grado}$$

$$F(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}) = \frac{F(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1}) - F(x_{k+n})}{x_k - x_{k+n}} \rightarrow n \text{ grado}$$

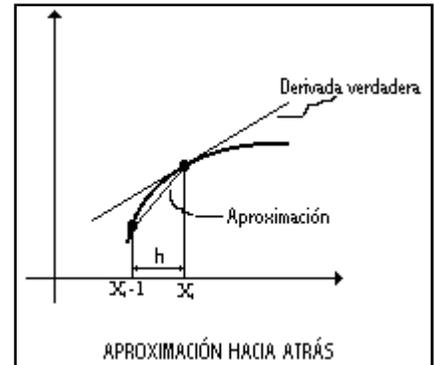
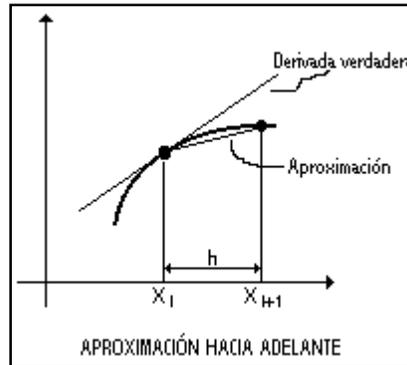
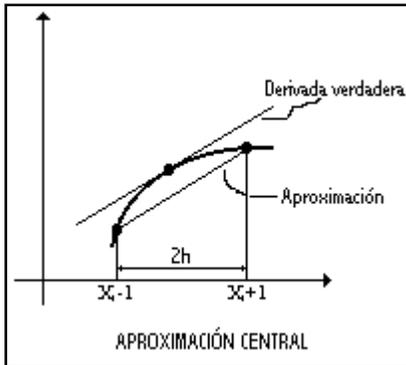
Sin perder generalidad $k = 0$ tenemos

$$F(x_0, x_1) = \frac{F_{x_0} - F_{x_1}}{x_0 - x_1} = \frac{F_{x_1} - F_{x_0}}{x_1 - x_0}$$

$$F(x_0, x_1, x_2) = \frac{F(x_0, x_1) - F(x_2)}{x_0 - x_2} = \frac{F(x_1, x_2) - F(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{F(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) - F(x_n)}{x_0 - x_n}$$

Hallar $F(x_3, x_2, x_1); F(x_2, x_3); F(x_5, x_4, x_3); F(x_1, x_5)$



EJERCICIO PROPUESTO

1) Para $F(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$ hallar hasta el 4° grado con $x = 1, 1.3, 1.6, 1.9, 2.2$
 Observamos que tanto las diferencias finitas ordinarias como en las divididas se cumple que dichas diferencias son constantes, en el orden n correspondiente a una función polinómica de grado n. Esta propiedad es muy importante para la producción del polinomio que ajusta la tabla.

La siguiente propiedad relaciona las diferencias finitas divididas con las ordinarias.

TEOREMA

Sea f una función definida sobre X_0, X_1, \dots, X_n ; tal que $h = X_k - X_{k-1}$; entonces se cumple:

$$f(X_0, X_1, \dots, X_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}$$

Método de Gregory-Newton

Cuando los valores de las abscisas se encuentren igualmente espaciados, la fórmula de Newton puede ser simplificada, resultando una fórmula de Gregory-Newton. Por lo tanto, un polinomio de Gregory-Newton que en un caso particular de un polinomio de Newton para puntos igualmente espaciados.

Operador de diferencia finita ascendente

Sea la función $y = f(x)$ que pasa por los puntos x_i $i = 0, 1, 2, \dots, n$, siendo $h = x_i - x_{i-1}$ un operador de diferencia finita ascendente Δ que está definido como:

a) orden 0:

b) orden 1:

c) orden 2:

d) orden n :

Fórmula de Gregory-Newton

Haciendo $u = \frac{x - x_0}{h}$ y usando la notación de diferencias finita ascendente como un operador Δ , se tiene un polinomio de Gregory-Newton de grado n

donde se utiliza una variable auxiliar

donde

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta^i y_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Temos abajo un complejidad de interpolación de Gregory-Newton para un polinomio de grado n como relacionado a un número de operaciones:

Operaciones	Complejidad
Adicion	
Multiplicación	n
Division	$n+1$

3.3. Regresión

Vamos a estudiar en este apartado la posible relación entre dos variables diferentes correspondientes a la misma población.

Estudiaremos ahora diversos aspectos de la Liga de Fútbol de Primera División española. Tienes una tabla con los puntos de cada equipo, sus partidos ganados, sus partidos perdidos, sus partidos empatados, en el ejemplo de regresión. Piensa detenidamente, e intenta contestar, las siguientes preguntas.

¿El equipo con más puntos es el que más partidos ha ganado?

¿ Y el que menos puntos tiene menos partidos ganados tiene?

¿Cuantos más partidos ganados tiene un equipo más puntos tendrá?

¿Cuantos más partidos ganados tiene un equipo normalmente más puntos tendrá?

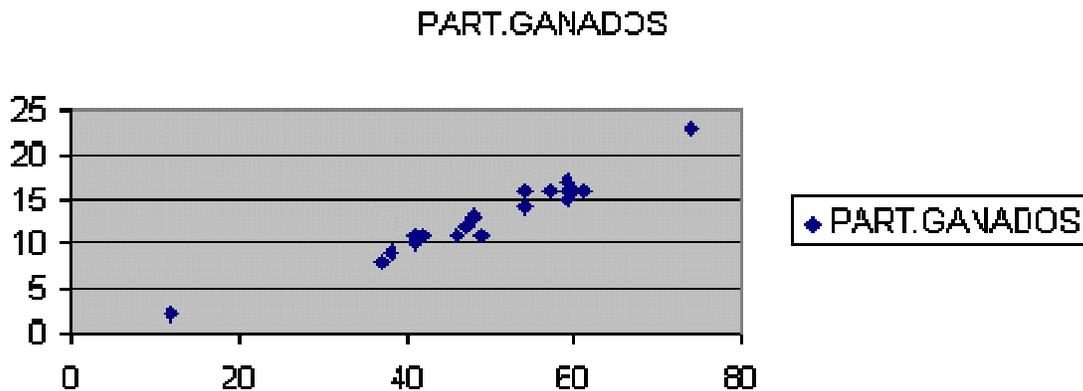
¿Depende los puntos que tiene un equipo de los partidos que ha conseguido ganar?

¿Sería lógico cuantificar de alguna manera esa dependencia?.

Las preguntas anteriores junto con sus contestaciones nos llevan a pensar que ciertas variables están relacionadas a veces con otras. La variable puntos, de nuestro ejemplo de la Liga Española, tiene cierta relación con la variable que cuantifica los partidos ganados o incluso con la variable de partidos perdidos. Esta parte de la Estadística, llamada Regresión, estudia estas relaciones e intenta cuantificar si la relación es fuerte, debil, etc.

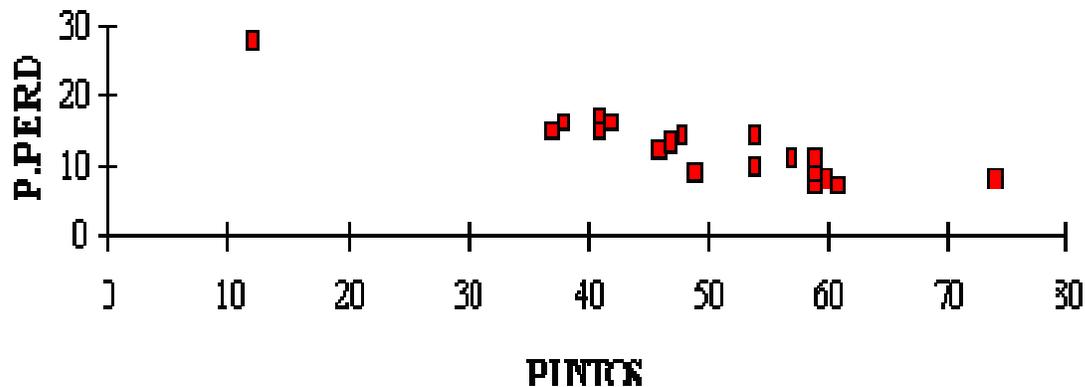
De todas formas si tienes dudas para contestar las preguntas anteriores, tal vez te ayude la siguiente gráfica. Es lo que llamamos: NUBE DE PUNTOS. La nube de puntos es simplemente una gráfica, expresando en el eje OX una variable y en el eje OY la otra variable. Por ejemplo en el eje OX los puntos de los equipos y en el eje OY los partidos ganados por dichos equipos.

Obtenemos así, la nube de puntos con la puntuación y los partidos ganados



También podemos y debemos fijarnos en la nube de puntos con la puntuación y los partidos perdidos, ya que antes hemos dicho que puede haber alguna relación.

PUNTOS PAREJADOS



La existencia de relaciones entre variables resulta fácil de entender.

El siguiente paso sería cuantificar si esta relación es mucha o poca, directa o inversa, fuerte o débil, etc. Para esto definimos el parámetro llamado **covarianza**. La covarianza de dos variables es la media aritmética de los productos de las desviaciones de cada variable respecto a su media, con lo que su cálculo se puede realizar así:

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})n_{ij}}{N}$$

Donde n_{ij} se llama frecuencia absoluta conjunta del par de valores (x_i, y_j) . El cálculo de la covarianza mediante la expresión anterior lo dejaremos para un poco más adelante.

Al cociente entre la covarianza y el producto de las desviaciones típicas de ambas variables se le denomina coeficiente de **correlación** (r). Su cálculo, también lo dejaremos para más adelante. Solamente diremos que el valor de r ha de estar necesariamente comprendido entre -1 y 1. Si $r=1$ ó $r=-1$, la dependencia entre ambas variables es perfecta (funcional). Si $0,5 < r < 1$ ó $-1 < r < -0,5$, la dependencia es significativa. Si $-0,5 < r < 0,5$ prácticamente se puede decir que no hay dependencia estadística. Además el signo positivo o negativo indica relación directa o inversa, respectivamente.

Otro concepto interesante en la regresión es lo que llamamos: **Rectas de regresión**. Denominaremos recta de regresión a la que mejor se ajuste a la nube de puntos. Se dice que una línea se ajusta lo mejor posible a una nube de puntos cuando la suma de las desviaciones de los puntos de la nube a dicha recta es la menor posible. Lo que en realidad se busca es que la recta pase por el mayor

número de puntos de la nube, pero intentando que no haya puntos que se alejen de la recta. Es por esto que hacemos la **suma de desviaciones**.

Podemos determinar dos rectas de regresión diferentes. Si deseamos saber el comportamiento de la variable Y según los valores que tome la variable X, la recta se llama de regresión de Y sobre X, y cuando buscamos el comportamiento de la variable X según los valores de Y, la recta se llama de regresión de X sobre Y.

Con ellas podemos aproximar el valor de una variable sabiendo el valor de la otra, aunque ésta no se presente en la muestra elegida. Así, si nos piden determinar la estatura de una persona de 83 kg. de peso o el peso de una persona de 134 de estatura, podremos sustituir estos valores en la rectas respectivas, si antes hemos tomado una muestra representativa de la población a estudiar.

Estas dos rectas de regresión, se cortarán en un punto. A este punto se le suele llamar **centro de gravedad de la distribución**

Esta es la parte teórica que debes conocer. Ahora puedes pasar a visitar los ejemplos, y posteriormente las actividades

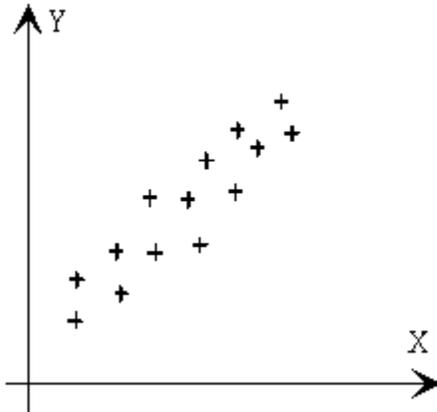
3.3.1. Regresión lineal

Regresión lineal

Abordaremos en esta página las distribuciones bidimensionales. Las observaciones se dispondrán en dos columnas, de modo que en cada fila figuren la abscisa x y su correspondiente ordenada y . La importancia de las distribuciones bidimensionales radica en investigar como influye una variable sobre la otra. Esta puede ser una dependencia causa efecto, por ejemplo, la cantidad de lluvia (causa), da lugar a un aumento de la producción agrícola (efecto). O bien, el aumento del precio de un bien, da lugar a una disminución de la cantidad demandada del mismo.

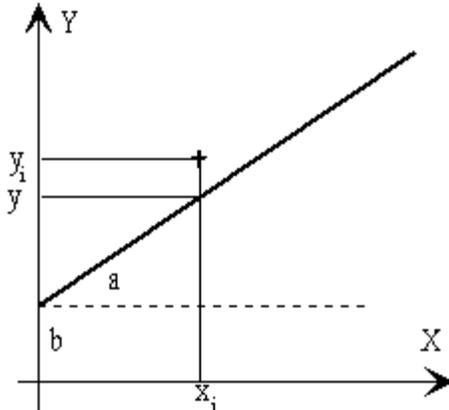
Si utilizamos un sistema de coordenadas cartesianas para representar la distribución bidimensional, obtendremos un conjunto de puntos conocido con el diagrama de dispersión, cuyo análisis permite estudiar cualitativamente, la relación entre ambas variables tal como se ve en la figura. El siguiente paso, es la determinación de la dependencia funcional entre las dos variables x e y que mejor ajusta a la distribución bidimensional. Se denomina regresión lineal cuando la función es lineal, es decir, requiere la determinación de dos parámetros: la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión, $y=ax+b$.

La regresión nos permite además, determinar el grado de dependencia de las series de valores X e Y , prediciendo el valor y estimado que se obtendría para un valor x que no esté en la distribución.



Vamos a determinar la ecuación de la recta que mejor ajusta a los datos representados en la figura. Se denomina error e_i a la diferencia $y_i - y$, entre el valor observado y_i , y el valor ajustado $y = ax_i + b$, tal como se ve en la figura inferior. El criterio de ajuste se toma como aquél en el que la desviación cuadrática media sea mínima, es decir, debe de ser mínima la suma

$$s = \sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2$$



El extremo de una función: máximo o mínimo se obtiene cuando las derivadas de s respecto de a y de b sean nulas. Lo que da lugar a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas del que se despeja a y b .

$$\frac{\partial s}{\partial a} = 0 \dots a = \frac{N \sum x_i y_i + \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial b} = 0 \dots b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{N}$$

El coeficiente de correlación es otra técnica de estudiar la distribución bidimensional, que nos indica la intensidad o grado de dependencia entre las variables X e Y . El coeficiente de correlación r es un número que se obtiene mediante la fórmula.

$$r = \frac{\sum (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle)}{N \sigma_x \sigma_y}$$

El numerador es el producto de las desviaciones de los valores X e Y respecto de sus valores medios. En el denominador tenemos las desviaciones cuadráticas medias de X y de Y.

El coeficiente de correlación puede valer cualquier número comprendido entre -1 y +1.

- Cuando $r=1$, la correlación lineal es perfecta, directa.
- Cuando $r=-1$, la correlación lineal es perfecta, inversa
- Cuando $r=0$, no existe correlación alguna, independencia total de los valores X e Y

Variantes de la regresión lineal

- **La función potencial**

$$y=c \cdot x^a$$

Se puede transformar en

$$\log y = a \log x + \log c$$

Si usamos las nuevas variables $X=\log x$ e $Y=\log y$, obtenemos la relación lineal $Y=aX+b$.

Donde $b=\log c$

Ejemplo:

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	1.06	1.33	1.52	1.68	1.81	1.91	2.01	2.11

Usar la calculadora para transformar esta tabla de datos en esta otra

X=log x	1.0	1.30	1.477	1.60	1.699	1.778	1.845	1.903
Y=log y	0.025	0.124	0.182	0.225	0.258	0.281	0.303	0.324

Calcular mediante el programa regresión lineal los parámetros a y c.

- **Función exponencial**

$$y=c \cdot e^{ax}$$

Tomando logaritmos neperianos en los dos miembros resulta

$$\ln y = ax + \ln c$$

Si ponemos ahora $X=x$, e $Y=\ln y$, obtenemos la relación lineal

$$Y=aX+b$$

Donde $b=\ln c$.

Ejemplo:

x	12	41	93	147	204	264	373	509	773
y	930	815	632	487	370	265	147	76	17

Usar la calculadora para transformar esta tabla de datos en esta otra

X= x	12	41	93	147	204	264	373	509	773
Y=ln y	6.835	6.703	6.449	6.188	5.913	5.580	4.990	4.330	2.833

Calcular mediante el programa regresión lineal los parámetros a y c .

La clase *Regresión*

La clase *Regresión* que describe la regresión lineal no difiere substancialmente de la clase *Estadística* que se ha descrito en la sección anterior. La diferencia estriba en que los miembros datos son dos arreglos x e y que guardan las series de valores X e Y , cuya dependencia funcional deseamos determinar. En los miembros dato públicos a y b se guarda la pendiente de la recta de regresión y la ordenada en el origen.

La función miembro *lineal*, calcula la pendiente a , y ordenada en el origen b de la recta de regresión. Se hace uso de variables auxiliares para guardar resultados intermedios: sx guarda la suma de todas las abscisas, sy la suma de todas las ordenadas, $sx2$ la suma de los cuadrados de las abscisas, $sy2$ la suma de los cuadrados de las ordenadas, y pxy , la suma de los productos de cada abscisa por su ordenada. Los valores calculados a partir de las fórmulas respectivas, se guardan en los miembros públicos a y b de la clase *Regresión*.

Para obtener el coeficiente de correlación hemos de calcular primero el valor medio $\langle x \rangle$ de la serie de datos X , y el valor medio $\langle y \rangle$ de Y . No calculamos las desviaciones cuadráticas medias sino que empleamos una expresión equivalente a la dada anteriormente para el coeficiente de correlación.

3.3..2. Regresión polinomial

Aquí se ajustan los datos (x_i, y_i) para $i=1, \dots, n$, a un polinomio de la forma

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_k x^k$$

n debe ser mayor que $k+1$ de lo contrario se tendría un "overfitting" total como lo muestra la figura.

Regresion Polinormica de grado 4



Cuando la variable dependiente es cuantitativa (por ejemplo, el número de especies) y la relación entre ambas variables sigue una línea recta, la función es del tipo $y = c + bx$, en donde c es el intercepto o valor del punto de corte de la línea de regresión con el eje de la variable dependiente (una medida del número de especies existente cuando la variable ambiental tiene su mínimo valor) y b es la pendiente o coeficiente de regresión (la tasa de incremento del número de especies con cada unidad de la variable ambiental considerada). Si la relación no es lineal pueden transformarse los valores de una o ambas variables para intentar linearizarla. Si no es posible convertir la relación en lineal, puede comprobarse el grado de ajuste de una función polinomial más compleja. La función polinomial más sencilla es la cuadrática ($y = c + bx + bx^2$) que describe una parábola, pero puede usarse una función cúbica u otra de un orden aun mayor capaz de conseguir un ajuste casi perfecto a los datos. Cuando la variable dependiente se expresa en datos cualitativos (presencia-ausencia de una especie) es aconsejable utilizar las regresiones logísticas ($y = \frac{\exp(c + bx)}{1 + \exp(c + bx)}$). Buenos ejemplos del uso de regresiones logísticas para predecir la distribución de una especie pueden encontrarse en Walker (1990), Osborne & Tigar (1992) y Parker (1999).

Suponga ahora que deseamos ajustar la ecuación polinomial

$$m_{y|x} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_r x^r$$

a los n pares de observaciones $\{(x_i, y_i); i = 1, 2, \dots, n\}$. Cada observación, y_i satisface la ecuación

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2 + \dots + b_r x_i^r + e_i$$

o

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2 + \dots + b_r x_i^r + e_i$$

donde r es el grado del polinomio, y e_i , y_i son de nuevo el error aleatorio y residual asociados con la respuesta y_i . Aquí, el número de pares, n , debe ser al menos tan grande como $r + 1$, el número de parámetros a estimar. Nótese que el modelo polinomial se puede considerar como un caso especial del modelo de regresión lineal múltiple más general, donde hacemos $x_1 = x$, $x_2 = x^2$, ..., $x_r = x^r$. Las ecuaciones normales toman la forma:

que se resuelve como antes para b_0, b_1, \dots, b_r

3.3.3 Regresión múltiple

Regresión lineal múltiple.

En la mayor parte de los problemas de **investigación** donde se aplica el análisis de regresión se necesita más de una variable independiente en el modelo de regresión. La complejidad de la mayor parte de los mecanismos científicos es tal que para ser capaces de predecir una respuesta importante se necesita un modelo de regresión múltiple. Cuando este modelo es lineal en los coeficientes se

denomina modelo de regresión lineal múltiple. Para el caso de k variables independientes X_1, X_2, \dots, X_k , la media de $Y | X_1, X_2, \dots, X_k$ está dada por el modelo de regresión lineal múltiple

$$m_{Y|X_1, X_2, \dots, X_k} = b_0 + b_1 X_1 + \dots + b_k X_k$$

y la respuesta estimada se obtiene de la ecuación de regresión de la muestra

donde cada coeficiente de regresión b_i se estima por b_i de los datos de la muestra con el uso del método de mínimos cuadrados. Como en el caso de una sola variable independiente, el modelo de regresión lineal múltiple a menudo puede ser una representación adecuada de una **estructura** más complicada dentro de ciertos rangos de las variables independientes.

Técnicas de mínimos cuadrados similares también se pueden aplicar al estimar los coeficientes cuando el modelo lineal involucra, digamos, potencias y **productos** de las variables independientes. Por ejemplo, cuando $k = 1$, el experimentador puede pensar que las medias $m_{Y|X_1}$ no caen en una línea recta pero que se describen de forma más apropiada con el modelo de regresión polinomial

$$m_{Y|X} = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_r X^r$$

y la respuesta estimada se obtiene de la ecuación de regresión polinomial

En ocasiones surge confusión cuando hablamos de un modelo polinomial como de un modelo lineal. Sin embargo, los estadísticos por lo general se refieren a un modelo lineal como uno en el cual los parámetros ocurren linealmente, sin importar cómo entran las variables independientes al modelo. Un ejemplo de un modelo no lineal es la relación exponencial

$$m_{Y|X} = a b^X,$$

que se estima con la ecuación de regresión

Existen muchos fenómenos en **la ciencia** y en la **ingeniería** que son inherentemente no lineales por naturaleza y, cuando se conoce la estructura real, desde luego se debe hacer un intento para ajustar el modelo presente. La **literatura** sobre estimación por mínimos cuadrados de **modelos** no lineales es voluminosa. El estudiante que quiera una buena explicación de algunos aspectos de este tema debe consultar Classical and Modern Regression with Applications de Myers.

Estimación de los coeficientes.

En esta sección obtenemos los estimadores de mínimos cuadrados de los parámetros b_0, b_1, \dots, b_k mediante el ajuste del modelo de regresión lineal múltiple

$$m \ y | x_1, x_2, \dots, x_k = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k$$

a los puntos de datos

$$\{ (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}, y_i) \mid i = 1, 2, \dots, n \text{ y } n > k \},$$

donde y_i es la respuesta observada para los valores $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}$, de las k variables independientes x_1, x_2, \dots, x_k . Cada observación $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}, y_i)$ satisface la ecuación

$$y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \dots + b_k x_{ki} + e_i$$

o

$$y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \dots + b_k x_{ki} + e_i,$$

donde e_i y e_i son el error aleatorio y residual, respectivamente, asociados con la respuesta y_i . Al utilizar el **concepto** de mínimos cuadrados para llegar a las estimaciones b_0, b_1, \dots, b_k , minimizamos la expresión

$$SSE = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i} - \dots - b_k x_{ki})^2$$

Al diferenciar SSE a su vez con respecto a $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$, e igualar a cero, generamos un conjunto de $k + 1$ ecuaciones normales

Estas ecuaciones se pueden resolver para $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$ mediante cualquier método apropiado para resolver **sistemas** de ecuaciones lineales.

Ejemplo 1

Se realizó un estudio sobre un camión de reparto ligero a diesel para ver si la humedad, **temperatura** del **aire** y **presión** barométrica influyen en la emisión de óxido nitroso (en ppm). Las mediciones de las emisiones se tomaron en diferentes momentos, con condiciones experimentales variantes. Los datos son los siguientes:

Óxido nitroso, y	Humedad x_1	Temperatura x_2	Presión x_3	Óxido nitroso y	Humedad x_1	Temperatura x_2	Presión x_3
0,90	72,4	76,3	29,18	1,07	23,2	76,8	29,38
0,91	41,6	70,3	29,35	0,94	47,4	86,6	29,35
0,96	34,3	77,1	29,24	1,10	31,5	76,9	29,63
0,89	35,1	68,0	29,27	1,10	10,6	86,3	29,56
1,00	10,7	79,0	29,78	1,10	11,2	86,0	29,48
1,10	12,9	67,4	29,39	0,91	73,3	76,3	29,40
1,15	8,3	66,8	29,69	0,87	75,4	77,9	29,28
1,03	20,1	76,9	29,48	0,78	96,6	78,7	29,29
0,77	72,2	77,7	29,09	0,82	107,4	86,8	29,03
1,07	24,0	67,7	29,60	0,95	54,9	70,9	29,37

El modelo es:

$$m_Y | x_1, x_2, x_3 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_3 x_3$$

Ajuste este modelo de regresión lineal múltiple a los datos dados y después estime la cantidad de óxido nitroso para las condiciones donde la humedad es 50%, la temperatura 76°F y la presión barométrica 29,30.

SOLUCIÓN

Para las ecuaciones normales encontramos que

La solución de este conjunto de ecuaciones da las estimaciones únicas

$$b_0 = -3.507778, b_1 = -0.002625, b_2 = 0.000799, b_3 = 0.154155.$$

Por tanto, la ecuación de regresión es

--

Para 50% de humedad, una temperatura de 76 °F y una presión barométrica 29,30, la cantidad estimada de óxido nitroso es

--

3.4 Ecuaciones

Introducción:

Una *expresión algebraica* es una combinación de números y símbolos (que representan números). Por ejemplo: $5x^2 + 3x^3y^3z$.

Un *término* es una combinación de números y símbolos (que representan números) unidos por operaciones de multiplicación o división. Por ejemplo: $5x^2$, $3x^3y^3z$ son los términos de la expresión algebraica $5x^2 + 3x^3y^3z$.

Un *factor* es cada uno de los componentes de un término. Por ejemplo: 5 y x^2 , son los factores del término $5x^2$ de la expresión algebraica $5x^2 + 3x^3y^3z$.

Elegido un factor, un *coeficiente*, es lo queda del término. Por ejemplo: 3 es el coeficiente de x^3y^3z , x^3 es el coeficiente de $3y^3z$, z es el coeficiente de $3x^3y^3$ y así sucesivamente. Si el coeficiente es un número se le llama coeficiente numérico.

Dos términos se dice que son similares cuando sólo se diferencian en el coeficiente numérico.

El *grado* de un término es la suma de los exponentes de las variables. Por ejemplo: el grado del término $3x^3y^3z$ es 7. El grado de una constante es cero.

Las ecuaciones son igualdades. Nunca debemos olvidar esto.

Debemos distinguir entre identidades y ecuaciones. Cuando dos expresiones son iguales para cualesquiera valores que se pongan en lugar de las letras que figuran en la expresión es una identidad. Cuando la igualdad sólo se cumple para determinados valores de la expresión es una ecuación.

Por ejemplo: $2x^2 + 5x^2 + x^2 = 8x^2$ es una identidad y $2x^2 + 3x = 5$ es una ecuación.

Clasificación

Las ecuaciones se pueden clasificar de varias formas:

a) Por el número de incógnitas.

Las ecuaciones pueden tener una o más incógnitas. Por ejemplo la ecuación $3x + 4 = 10$, sólo tiene una incógnita, la ecuación $3x - y = 5$, tiene dos y $5xy - 3x^2 + z = 8$ tiene tres incógnitas.

Las ecuaciones con una incógnita se pueden imaginar como puntos sobre el eje x. Las de dos incógnitas como curvas en un plano. Las de tres incógnitas como curvas en un espacio de tres dimensiones.

b) Por el grado de la incógnita.

Las ecuaciones de una incógnita se pueden clasificar por el grado de la incógnita (el grado es el exponente más alto de la incógnita).

Hay fórmulas generales para resolver las ecuaciones de grado 1 a 4 (pero las fórmulas son complicadas y difíciles de recordar para grado mayor que 2).

Si no se puede descomponer la ecuación en factores, cualquier ecuación, sea del grado que sea, se puede resolver de esta forma:

Sea la ecuación: $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$

Si x_1, x_2, \dots, x_n son las soluciones de la ecuación, se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n = a_2$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_1x_2x_n + x_2x_3x_4 + \dots + x_2x_3x_n + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_3$$

.....

$$x_1x_2\dots x_n = (-1)^n a_n$$

Utilizando estas ecuaciones, tendríamos un sistema de ecuaciones que nos permitiría obtener las soluciones.

c) Por el número de términos

c1) Ecuaciones binómicas:

Las ecuaciones con dos términos se llaman ecuaciones binómicas.

c2) Ecuaciones polinómicas:

Las ecuaciones que tienen tres términos, se llaman trinómicas, y aunque podríamos seguir llamándolas en función del número de términos, se suelen llamar polinómicas

3.4.1. ecuaciones de potencia

3.4.2. ecuaciones exponenciales

Se llaman **ecuaciones exponenciales** a las ecuaciones en las que en algún miembro aparece una expresión exponencial (**potencia de base constante (número) y exponente variable (x, y, etc)**). Por ejemplo:

a) $3^{2-x^2} = 3$

b) $4^{2x+1} = (0,5)^{3x+5}$

c) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

d) $e^x - 5e^{-x} + 4e^{-3x} = 0$.

Inicialmente, como en cualquier ecuación, se trata de encontrar algún valor de x que cumpla la igualdad.

En casos sencillos, eso se puede lograr por simple observación. Por ejemplo, si se nos plantea la ecuación:

$2^x = 4$, evidentemente el valor $x = 2$ es una solución. Claro que no siempre será tan sencillo.

Pero veamos ya gráficamente lo que esto significa

Si representamos la función exponencial $y = 2^x$ y la recta $y = 4$, el valor de la abscisa " x " del punto de corte de ambas gráficas será la solución de la ecuación.

TIPO I

Corresponden a este tipo los dos primeros ejemplos:

a) $3^{2-x^2} = 3$ y b) $4^{2x+1} = (0,5)^{3x+5}$

En ambos casos, a diferencia de los otros dos, **se observa que los dos miembros de la ecuación contienen un sólo término ("no hay sumas")**.

TIPO II .

Se trata de ecuaciones exponenciales en las que en algún miembro aparece una suma de expresiones exponenciales que no se puede realizar. Es el caso de las ecuaciones c) y d) del principio.

Gráficamente se pueden resolver como en el caso anterior representando cada miembro de la ecuación como se ve en la pantalla siguiente con la ecuación: $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$, donde se observa que la solución es $x = 1$

Solución numérica :Supongamos la ecuación $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$. Se trata de conseguir que todas las expresiones exponenciales sean iguales y lo más sencillas posibles. En este caso 2^x , para lo que basta usar adecuadamente las propiedades de las potencias: $2^x/2 + 2^x + 2 \cdot 2^x = 7$.

Conseguido esto llamamos a $2^x = z$ con lo que nos queda la ecuación $z/2 + z + 2z = 7$; ecuación de primer grado que sabemos resolver (Ver el tema de ecuaciones si se desea).

Una vez resuelta se obtiene $z = 2$, con lo que volviendo al cambio realizado: $2^x = 2$. Ecuación exponencial del tipo que hemos trabajado antes, cuya solución es $x = 1$.

TIPO II . EJEMPLO D)

Utilizando la escena vamos a resolver la ecuación **d)** del principio:

$$\mathbf{d) \ e^x - 5e^{-x} + 4e^{-3x} = 0.}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES

Como el nombre indica, **son sistemas de ecuaciones donde una o más de ellas son de tipo exponencial.**

Los métodos de resolución numéricos son idénticos a los expuestos para las ecuaciones.

Gráficamente basta representar las ecuaciones correspondientes que se pueden escribir tal y como se nos presentan

Bibliografía

1. Skoog, West y Hollard: (1994) **Química Analítica**. Edit. Mc. Graw Hill.
2. L. V. Atkinson y P. J. Harley. *An Introduction to Numerical Methods with Pascal*. Adison-Wesley, 1983.
3. R. L. Burden y J. D. Faires. *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1985.
4. B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan, y S. Watt. *Maple V Language Reference Manual*. Springer-Verlag, 1991.
5. B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan, y S. Watt. *First Leaves: A Tutorial Introduction to Maple V*. Springer-Verlag, 1992.
6. Francis Sheid Rosa Elena Di Costanzo. *Métodos Numéricos*. McGraw Hill, 1989.
7. Stanley I. Grossman. *Algebra Lineal*. Grupo Editorial Iberoamericana, 1987.
8. Thomas Richard McCalla. *Introduction to Numerical Methods and FORTRAN Programming*. Wiley, 1967.
9. Antonio Nieves y Federico C. Domínguez. *Métodos Numéricos aplicados a la ingeniería*. CECSA, 1995.
10. Ben Noble y James W. Daniel. *Algebra Lineal*. Prentice Hall, tercera edición, 1989.
11. W. Allen Smith. *Análisis Numérico*. Prentice Hall, 1988.

Actividades complementarias

1.-Tomemos la función del ejemplo anterior, $f(x) = \sqrt{x}$, donde claramente $f \in C^\infty$.

Supongamos que queremos calcular $\sqrt{1,5}$ y consideramos los nodos 1; 2; 3; 4.

2.- Con los siguientes datos, halle los polinomios de interpolación de Newton de grado: a) uno b) dos c) tres;

(-2; 21), (0;-1), (1; 12), (4; 147):